NEBESKÁ MECHANIKA

M. Šidlichovský

Skripta pro MFF UK

Úvod

Co je nebeská mechanika?

Nebudeme se pokoušet vymezit, co přesně je nebeská mechanika. Úmyslně se spokojíme s poněkud vágním prohlášením, že jde o nauku o pohybu nebeských těles a příčinách tohoto pohybu. Přitom pod nebeskými tělesy rozumíme nejen přirozené astronomické objekty (Slunce, planety, satelity planet, asteroidy, meteoroidy, hvězdy), ale i umelé objekty (družice, kosmické lodi). Někteří autoři dávají přednost užší definici, kdy se uvažuje jen pohyb pod vlivem gravitačních sil. Spory o tom, zda negravitační síly (např. tlak záření, odpor prostředí, Yarkovského efekt či Poyntingův-Robertsonův efekt) patří do nebeské mechaniky, nemají valného smyslu. Vlastním zájmem astronomů je vždy co nejpřesnější určení pohybu těles a tam, kde negravitační síly mohou hrát nezanedbatelnou roli, je třeba je uvážit. Základ popisu systému s uvážením těchto negravitačních sil budou vždy klasické popisy nebeské mechaniky vyvinuté při studiu sil gravitačních a vydělovat negravitační síly do nějakých nově definovaných oborů je zbytečné.

Nebeská mechanika používá matematických metod a výrazně se o rozvoj matematiky samé zasloužila. Jako popis chování reálných fyzikálních systémů má blízko i k fyzice a pomáhá určovat řadu geodetických a astronomických konstant. Někdy se jako jakási podmnožina nebeské mechaniky vyčleňuje astrodynamika, která se zabývá určováním a zlepšováním výpočtu určitých konkrétních drah, většinou umělých těles. Sem patří i optimalizace takových drah (např. vzhledem ke spotřebě paliva). Původně se nebeská mechanika zabývala jen tělěsy sluneční soustavy, její metody však našly uplatnění i při studiu drah hvězd v galaxiích, vývoje různých struktur (např. spirálních ramen nebo příček), které v galaxiích pozorujeme. Studia tohoto typu zahrnujeme většinou pod galaktickou dynamiku. V té jde většinou o interakci velkého počtu objektů a pro popis vývoje systému se často užívá statistického popisu. Galaktická dynamika by podle naší široké definice měla spadat pod nebeskou mechaniku, ale právě statistický popis vedl k novým metodám galaktické mechaniky v nebeské mechanice dosud neužívaným, a tak k vydělení dnes samostatné galaktické dynamiky. Překryv obou oborů je ovšem velký.

Poznámky k historii nebeské mechaniky

Počátky astronomie

Pohyb těles na nebeské sféře fascinoval lidi odedávna a jeho pozorování a výklad byly často spojovány s náboženstvím. Na samém počátku to však byly hmotné potřeby každodenního života, které vedly člověka k pozorování hvězd. Šlo především o problém orientovat se a počítat čas v delších časových rozmezích. V pastevectví a zemědělství člověk potřeboval kalendář. Prvním nabízejícím se jevem pro tento účel byly střídající se fáze měsíce s periodou přibližně 29 a půl dne. Další periodou byla perioda asi 365 a čtvrt dne nalezená při pozorování denního pohybu Slunce při jeho východu východu a západu. Takováto pozorování často pomáhala lidem připravit se na rozmary přírody. Ve starém Egyptě ve třetím tisíciletí př. n. l. např. pozorovali každoroční heliaktický východ Síria (ten nastává v den, kdy se Sírius objeví poprvé v ranním soumraku před východem Slunce). Tento východ totiž krátce předcházel každoročním záplavám Nilu. Sírius, nejjasnější hvězda oblohy, tak měl ve starém Egyptě prominentní úlohu v souvislosti se zahájením egyptského zemědělského ročního cyklu. Rozvoj astronomie probíhal hlavně u prvních civilizací v povodí velkých řek. Číňané v povodí Žluté řeky zase již ve 3. tisíciletí př. n. l. znali délku tropického roku s přesností lepší než setina dne. Často byla astronomická pozorování spojována s náboženstvím. V aztéckých chrámech určovali kněží azimut Slunce, podle něhož se určoval druh bohoslužeb. Obecně lidé nejčastěji pozorovali především východy a západy Slunce a Měsíce vzhledem k horizontu. Mezní hodnoty byly často vytyčovány kamennými objekty. Nejznámější taková prahvězdárna Stonehenge u města Salisbury v Anglii pochází z období kolem 1700 př. n. l.

V předantické astronomii postoupila nejdále astronomie babylonská, která začala sestavovat tabulky udávající periodicitu nejjasnějších planet.

Antická astronomie

Období antické vědy začíná na přelomu 7. a 6. století př. n. l. Platón (427-347 př. n. l.) prohlašoval, že úkolem astronomie je vysvětlit pohyb těles na obloze pomocí rovnoměrných kruhových pohybů. Jeho žák Eudoxos z Kindu použil 27 sfér,jejichž střed byl ve středu Země. V tomto přístupu je především nové to, že se i v pohybu planet hledá pravidelná zákonitost (objevuje se poprvé u pythagorovské filozofie, ke které měl Platón velmi blízko). Z počátku si řecká věda s planetami díky jejich nepravidelnému pohybu na obloze příliš nevěděla rady, jak je vidět i z názvu (planeta ve staré řečtině znamené poutník či tulák). Je zajímavé, že již pythagorovci došli k závěru, že Země je koule otáčející se jednou za den kolem své osy a tak vysvětlili pozorované otáčení hvězdné oblohy. K tomuto názoru se přikláněl i Platón, pro kterého však byla Země stále středem vesmíru. Pythagorovci však šli ještě dále a Zemi zbavili tohoto výsadního postavení. Země se podle nich pohybovala po kruhové dráze okolo jakéhosi centrálního ohně, tedy nikoli kolem Slunce. Měsíc, Merkur, Venuše, Slunce, Mars, Jupiter, Saturn a sféra stálic obíhají pak postupně na dalších drahách. Na druhé straně centrálního ohně obíhá ještě Protizemě, kterou Pythagorovci potřebovali, aby počet obíhajících těles byl dokonalé číslo deset. Centrální oheň nemůžeme vidět, protože zeměkoule je podle pythagorovců obydlena jen na jedné polovině odvrácené od tohoto ohně (ze stejných důvodů není vidět Protizemě). Jde o jakousi směs mystiky s racionalitou. Složité pohyby planet lze pak vysvětlit skládáním pohybů Země a planet, což je velký pokrok v chápání sluneční soustavy.

Eudoxovy sféry měly společný střed v Zemi a osy mohly být vzájemě skloněny, přitom u některých sfér je osa pevně zachycena na některé z vnějších sfér a je rotací vnější sféry unášena. Aristoteles (384-322 př. n. l.) rozšířil model na 59 sfér a prohlásil tyto sféry za křišťálové. Tato teorie musela být opuštěna, protože nemohla vysvětlit, proč se mění jasnost planet (vzdálenost od Země je v ní pro každou planetu konstantní). Podle Aristotelovy představy o totožnosti středu vesmíru se středem Země, kde je též střed veškeré tíže, Země vlastně vznikla tak, že do středu tíže byla vtaženy čtyři prvky (zem, voda, vzduch a oheň). Vše co je složeno z těchto prvků je pomíjivé, sférou Měsíce počínaje je vesmír z éteru a je neměnný a věčný. Tento pohled podložený značnou Aristotelovou autoritou se stal překážkou pochopení vesmíru a především toho, že další tělesa ve vesmíru by mohla mít vlastní gravitaci.

Přesto se i v době Aristotelově dále rozvíjely pythagorovské pohledy. Herakleides z Pontu (390-310 př. n. l.) nejen přijal pythogorovský pohled na otáčení Země, ale poprvé označil Slunce za střed oběžných drah dvou planet Merkura a Venuše. Vycházel z toho, že Merkur ani Venuše se nikdy nevzdalují od Slunce o více než jistý úhel.

Helénistická astronomie

Po smrti Alexandra Velikého (Aristotelova žáka) se středisko řeckého kulturního života přesunulo do Egypta, který byl součástí rozpadající se Alexandrovy říše. Ve městě Alexandrii vznikl vědecký ústav Musaion a velká knihovna. Tato původem řecká kultura, vzniklá na egyptské půdě, je označována jako kultura helénistická. Aristarchos (3. století př. n. l.), Hipparchos (2. stol. př. n. l.) a Ptolemaios (2.stol. našeho letopočtu) jsou nejdůležitější reprezentanti tohoto období, charakterizovaného užitím na svou dobu přesných pozorování a propočtů. Aristarchos ovlivněný Herakleidovým pohledem postoupil ještě dále a prohlásil Slunce za střed, okolo kterého obíhají nejen Merkur a Venuše, ale i Země. K tomuto závěru vedly Aristarcha výsledky jeho měření doby trvání jednotlivých fází úplného zatmění Měsíce, ze kterých byl geometrickou úvahou schopen vyjádřit průměry Měsíce a Slunce a jejich vzdálenosti od Země v době zatmění pomocí poloměru Země. Toto měření, ač zatížené nesmírnou chybou (ta vznikla hlavně proto, že úhlový průměr Slunce a Měsíce určil Aristarchos jako 2^o místo $1/2^o$) přesto ukázalo, že Slunce má mnohokrát větší poloměr než Země. Z toho Aristarchos usoudil, že bude spíše obíhat Země okolo Slunce, než naopak.

Aristarchův systém je v principu (nikoli kvantitativně ve vzdálenostech) totožný s Koperníkovým heliocentrickým systémem. Koperník přidal snad jen popis precesního pohybu zemské osy. Tento systém však nezapustil v řecké vzdělanosti kořeny jednak z důvodů náboženských (athénský stoický filosof Kleanthés) navrhoval, aby byl Aristarchos obžalován z bezbožnosti), ale také z důvodů experimentálních, nebyla totiž naměřena roční paralaxa hvězd. Představa, že by vzdálenosti hvězd byly tak obrovské, že by paralaxa byla tehdejšími metodami neměřitelná, byla zřejmě pro tehdejší představy nepřijatelná.

V té době byla opuštěna teorie soustředných sfér a je nahrazována teorií epicyklů a deferentu. Dráha planety okolo Země je popisována jako kruhový pohyb okolo pohyblivého středu, který sám obíhá po kruhové dráze okolo Země. Kružnice, po které se pohybuje střed, se nazývá deferent, kružnice, na které se pohybuje planeta je epicykl. Tímto způsobem je možno konečně zajistit pozorovanou proměnlivost vzdáleností planet od Země a navíc může dojít i k dočasnému zpětnému pohybu, který byl u planet pozorován. Pomocí deferentu a epicyklu vytvořil Hipparchos model pohybu Slunce, který souhlasil s pozorováním a vysvětloval např. pozorování, podle kterých mezi slunovraty a rovnodennostmi neuplyne stejná doba. Hipparchos také objevil precesi jarního bodu (její periodu určil na 36 000 let, správně je asi 26 000 let). Tento poznatek potvrdil ze starých babylonských pozorování. Za staré babylonské říše byl jarní bod v souhvězdí Býka, za Hipparcha v souhvězdí Berana. Hipparchos si tak uvědomil důležitost starých pozorování a snad proto vytvořil pro další generace podrobný katalog stálic (více než 800).

Astronomie okolo přelomu letopočtu se objevuje i v římské říši, je však možno říci, že nic zvláště významného se v této oblasti v astronomii neudálo. Teprve ve 2. stol. našeho letopočtu vzniká opět v Alexandrii Ptolemaiovo dílo. Jeho Almagest se stal pro příštích 1400 let biblí astronomie. Almagest obsahoval kromě nauky o stavbě pozorovacích přístrojů, trigonometrických tabulek a katalogu stálic i teorii pohybu planet. Ptolemaiova planetární soustava je důsledně geocentrická. Pohyb planet je vysvětlován pomocí deferentů, které nemusí mít střed v Zemi, a epicyklů. Pohyb středu epicyklu však už nemusí být rovnoměrný na deferentu. Zavádí se střed ekvantu, což je bod souměrně sdružený k Zemi podle středu excentricky položeného deferentu. Rovnoměrně se pak otáčí spojnice středu ekvantu a středu deferentu. V Ptolemaiově soustavě obíhají tělesa okolo Země v pořadí: Měsíc, Merkur, Venuše, Slunce,Mars, Jupiter, Saturn, sféra stálic. Pro zpřesnění zavádí Ptolemaios nikoli jeden, ale celou řadu epicyklů. Aby vysvětlil trvalou úhlovou blízkost Slunce a Merkura a Slunce a Marsu, předpokládá, že střed Slunce, střed epicyklu Merkura, střed epicyklu Venuše a střed Země jsou stále v jedné přímce. Protože změna poloměru epicyklu a deferentu při zachování jejich poměru vede ke stejnému směru k planetě, je pořadí těles určeno zřejmě pozorovanou dobou oběhu. Stačilo by tedy volit deferent Merkura a Venuše společný s dráhou Slunce a byla by zřejmá ekvivalence takového výkladu s Herakleidovým pojetím obíhání Merkura a Venuše okolo Slunce. Komplikovanost teorie řadou dalších epicyklů tento pohled neučinila zřejmým. Navíc teorie velmi dobře vystihovala pohyb planet i pozorované kličky na obloze a tato její dokonalost bránila dlouho rozvoji koncepčně jednodušších heliocentrických teorií.

Astronomie ve středověku

Když byl v r. 476 dobyt Řím Germány a arabské vojsko dobylo v r. 643 Alexandrii, byla na dlouhou dobu potlačena i tradice antické vědy. Úkolem vědy v Evropě bylo sloužit bohosloví. Protože křesťanská liturgie stanovila Boží hod velikonoční na první neděli po prvním jarním úplňku, zůstával zde pro astronomii jistý velmi omezený základ existence. Největší mistři evropské vědy však znali méně než žáci v antických akademiích.

Astronomie v době renesance

Společenský vývoj v 16. a 17. století připravil astronomii mnohem lepší podmínky. Rozvíjející se řemeslná výroba ukazovala na důležitost znalostí mechaniky a renesance počítala s přírodovědou jako s nejdůležitější složkou vědy. Mořeplavba, rozvíjená hlavně z ekonomických pohnutek, vyžadovala odpovědi na naléhavé otázky navigace. Posouvání např. skutečné jarní rovnodennosti vzhledem ke kalendáři vyžadovalo reformu kaledáře. Víra v astrologii byla dalším faktorem. Tato situace vedla k tomu, že vznikla společenská poptávka po hlubším pochopení pohybu Země a planet.

Polský astronom Mikuláš Koperník (1473-1543) vytvořil ucelenou heliocentrickou teorii, která je koncepčně jednodušší než komplikovaný Ptolemaiův přístup. Tím, že se v jeho teorii Země pohybuje kolem Slunce spolu s ostatními planetami (navíc rotuje kolem své osy a vykonává precesní pohyb), nepřenáší se tyto pohyby na planety (jako v geocentrickém systému) a zvláštnosti pozorovaného pohybu planet se vysvětlují přirozeně relativní polohou těles. Tím se výrazně zjednodušuje výklad pohybů. I Koperník však pro zvýšení přesnosti používal pro vysvětlení pohybu planet skládání několika kruhových pohybů (na rozdíl od Ptolemaia však vystačil s rovnoměrným kruhovým pohybem). Jednoduchý kruhový pohyb by při tehdejší přesnosti měření poloh již nestačil. V Koperníkově teorii je pohyb Země vysvětlen jako rovnoměrný kruhový pohyb po kružnici, vzhledem k jejímuž středu je slunce položeno excentricky, tj. posunuto asi o 1/31 jejího poloměru od středu. Tuto polohu si vyžádala pozorování nestejných intervalů mezi slunovraty a rovnodenostmi. Protože excentricita zemské dráhy je malá (jen asi 0.06) stačila takováto kruhová dráha k popisu pohybu Země s dostatečnou přesností. U ostatních planet potřeboval dva epicykly. Na rozšíření Koperníkových výsledků se velkou měrou podílely tzv. Pruténské tabulky. Tyto tabulky, které sestavil Erasmus Reinhold (1511-1553) na podkladě Koperníkových předpokladů, byly totiž přesnější než do té doby používané tabulky založené na Ptolemaiově přístupu.

Koperníkovy myšlenky, které v souhlase s tehdejší renesanční filozofií (spojenou s progresivní ideologií rozvíjejícího se měšťanstva) vyzvedávaly proti církevnímu dogmatu úlohu přírodních sil a některá církevní dogmata přímo vyvracely, byly brzo církví chápány jako nebezpečí. Sám Koperník zemřel dříve, než mohl tuto vyvolanou nevůli církve pocítit. Giordano Bruno, původně mnich z neapolského kláštera, byl v reakci církve na toto nebezpečí upálen v r. 1600 v Římě na náměstí Květů. Giordano Bruno dovedl ovšem Koperníkovy myšlenky ještě dále. Zatímco Koperník skoncoval s vyjímečností Země, Bruno skoncoval i s vyjímečností Slunce. Tvrdil, že každá hvčzda může být sluncem a středem planetární soustavy.

Dánský astronom Tycho Brahe (1546-1601) působící v Praze u dvora Rudolfa II. byl především výtečný pozorovatel. Uvědomil si, že roční pohyb Země okolo Slunce by sebou přinášel existenci roční paralaxy hvězd. Protože ani při tehdejší přesnosti takovou paralaxu nemohl pozorovat, vrátil se k představě, že Slunce (a Měsíc) obíhají okolo Země, zatímco ostatní planety obíhají okolo Slunce. Argumentoval tím, že tato představa vyhovuje nejen fyzikálním názorům a pozorováním, ale i Písmu svatému. Tato představa byla sice koncepčně krokem zpět, ale sehrála svou úlohu v tom, že v době zákazu heliocentrického systému umožnila astronomům užívat geometricky ekvivalentní systém.

Jan Kepler (1571-1630) vycházel z pozorování Tychona Brahe, u kterého působil chvíli jako pomocník. Jeho tři zákony o pohybu planet byly průlomem do tehdejších postupů pro řešení tohoto problému a jeho Rudolfínské tabulky planet byly daleko lepší než věechny předchozí.

Galileo Galilei (1564-1642) se zabýval pohybem pozemských těles při volném pádu a vrhu a samozřejmě konstrukcí dalekohledu. Dalekohled byl v té době znám, zejména v Holandsku. Galileova zásluha zde spočívá v tom, že dokázal tento přístroj nejen vytvořit na základě teoretických úvah z doslechu, ale hlavně v tom, že ho začal systematicky využívat k astronomickým pozorováním. S Keplerem byli v častém písemném styku. Tématem byla právě otázka konstrukce dalekohledů. Oba tak, zdá se, nepostřehli, že právě v syntéze jejich oborů totiž pohybu planet (Kepler) a gravitačního působení (Galileo) bude spočívat snad nejvýznamnější krok vědy v tomto tisíciletí. Kepler sice hledal sílu, která planety na jejich dráze pohání, ale jeho chybou bylo, že tuto sílu hledal ve směru pohybu planety a její totožnost s gravitační silou známou právě z volného pádu těles mu tak unikla. Kepler ovšem neměl k dispozici diferenciální počet. Ten začal vytvářet Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) kolem r.1673 v souvislosti s geometrií, tečnami křivek atd. a nezávisle Isaac Newton (1643-1727) při své formulaci pohybových zákonů.

Když Newton rigorózně formuloval souvislost mezi silou a zrychlením, ukázal, že z druhého Keplerova zákona (zákona ploch) nutně plyne, že síla, která na planetu působí, musí být nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti od Slunce. Newton pochopil, že tato přitažlivá síla je všeobecnou vlastností hmoty a že gravitační síla způsobující pohyb planet je touž silou, která způsobuje pád předmětů (jablka) na Zemi. Zformuloval tak svůj zákon věeobecné gravitace, který uveřejnil spolu s dalšími výsledky ve slavné knize *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, o níž často mluvíme jen jako o Principiích. Zde Newton objasňuje poprvé na základě gravitace princip přílivu a odlivu. Poukazuje na to, že dráha planety nebude díky působení dalších planet přesná elipsa, ale že její charakteristiky se budou pomalu měnit. Newton také formuluje metodu na výpočet hmotnosti planet. Ze svého odvození ví, že třetí Keplerův zákon neplatí zcela přesně. Poměr třetí mocniny velké poloosy aa druhé mocniny oběžné doby T závisí totiž na součtu hmotností Slunce a planety a nikoli jen na hmotnosti Slunce. Z odchylek od tohoto zákona pro různé dvojice planet lze tak činit závěry o hmotnostech planet. Newton také objasnil parabolické chování drah některých komet. Je zajímavé, že Newton sám často význam svých objevů v exaktních vědách podceňoval a pokoušel se o objevy v teologii, snažil se datovat události v bibli a podobně.

Nebeská mechanika v 18. a 19. století

Zatímco v Anglii, kde měl Newton velkou autoritu, byla jeho teorie rychle přijata, ve Francii, kde byla přijímána Descartova vírová teorie, byli zdrženlivější. Bylo zřejmé, že Newtonova teorie se musí osvědčit v řešení řady problémů. Newtonův přítel Edmund Halley zjistil, že kometa z r. 1682 má podobnou dráhu jako kometa z r. 1607 pozorovaná již Keplerem a jako kometa pozorovaná v r.1531 Apianem. Časové inervaly mezi průchody komet přísluním byly 74 let 323 dní a 76 let 62 dní. Navíc v roce 1456 byla také pozorována kometa, její dráhu však bylo obtížné určit. Halley usoudil, že jde o jednu jedinou kometu a jednoduchým výpočtem určil její příští návrat na konec r. 1758. Když se kometa v tomto roce neobjevila, zdálo se, že půjde o porážku již vítězící Newtonovy teorie. Alexis Claude Clairaut (1713-1765) však sestavil rovnice pro rušivá působení Saturna a Jupitera a dva počtáři, paní Lepautová a pan Lalande, po dobu osmnácti měsíců numericky tyto rovnice krok za krokem integrovali. Návrat byl určen na polovinu dubna 1759 s odhadem přesnosti plus minus jeden měsíc. Kometa prošla přísluním 13. března 1759.

V padesátých letech 18. století se Euler (1707-1783), D'Alembert (1717-1783) a Clairaut (1713-1765) zabývali teorií pohybu Měsíce. Měsíční dráha je v prvním přiblížení elipsa o excentricitě asi 0.05. Sklon roviny této elipsy k ekliptice je zhruba konstantní $I = 5^\circ\ 9'$. Díky poruchám od Slunce se rovina elipsy otáčí tak, že uzlová přímka (její průsečnice s rovinou ekliptiky) se otáčí retrográdně zhruba o $19^\circ\ 21'$ za rok a samotné perigeum o $40^\circ\ 34'$ za rok. Příčina tohoto stáčení (poruchy od Slunce) byla známá již v 18. století. V souvislosti se změnou elementů dráhy objevil Euler metodu variace konstant, která je dnes běžnou metodou v teorii diferenciálních rovnic.

Problém pohybu Měsíce souvisel s problémem rychlé navigace, na jehož řešení bylo vypsáno několik odměn (španělský král Filip III. – 100 000 korun, holandské generální stavy – 30 000 florinů, britský parlament – 20 000 liber). Problém určování zeměpisné délky (šířku bylo možno určovat poměrně dobře) byl klíčový. Přestože zmíněné teorie vysvětlovaly mnohé, tabulky na jejich základě sestavené nedosahovaly požadované přesnosti. Teprve později byl do teorie zahrnut vliv tvaru Země (právě z pohybu Měsíce určil později Laplace zploštění Země 1:300), či uváženy změny excentricity zemské dráhy a slapové působení. Anglickou cenu tak obdržel až v r. 1772 hodinář John Harrison, který sestavil chronometr. Ten umožnil námořníkům znalost greenwichského času. Z něj a pozorovaného místního času bylo možno určit zeměpisnou délku.

Teorii pohybu planet dále posunuli Joseph Luis Lagrange (1736-1813) a Pierre Simon Laplace (1749-1847). Lagrange byl Francouz, který začínal u Eulera v Berlíně. Našel zvláštní periodická řešení neboli librační centra v problému tří těles. Eulerovu metodu variace konstant dovedl do tak zvaných

Lagrangeových planetárních rovnic, kde se časové změny elementů dráhy planety vyjadřují jako funkce elementů této planety (ale i planet dalších). Lagrange přispěl svojí formulací Lagrangeových rovnic prvního a zvláště druhého druhu k výraznému pokroku teoretické mechaniky obecně. Laplace začínal pod vlivem d'Alembertovým. Ve svém pětisvazkovém díle *Mécanique céleste* Laplace nejen shrnuje, ale v mnoha směrech dovršuje práce svých předchůdců (slapy, librace Měsíce, tvar Země, pohyb Měsíce, pohyb planet). Lagrange a Laplace se jako první začali systematicky zbývat otázkou stability sluneční soustavy. Tento pojem lze matematicky definovat mnoha různými způsoby. V podstatě jde o to, zda poruchy, kterými na sebe planety působí, mohou vést ke kvalitativnímu narušení soustavy např. (ztráta planety do vesmíru, nebo její pád na Slunce). K tomu by mohlo dojít např. pomalým zvětšováním excentricity některé planety, takže by se její dráha křížila s drahou planety jiné. Laplace dokázal, že při omezení na malé excentricity (odpovídá zanedbání členů vyššího stupně než druhého v excentricitách a sklonech planet v Hamiltoniánu systému), budou změny excentricit malé a periodické, tj. tvar drah planet se nikdy nebude příliš lišit od tvaru, který pozorujeme. Nakolik mohou zanedbané členy ovlivnit tento závěr pro velmi dlouhé časové úseky, nebylo ovšem zřejmé.

Zajímavý je Newtonův názor na otázku stability sluneční soustavy. Newton věřil, že vzájemné působení planet může zcela narušit stabilitu sluneční soustavy a to vyžaduje čas od času boží zásah, který udrží planety na jejich místech. Otázka stability byla reálná už proto, že Halley ukázal ze starých chaldejských pozorování, že zatímco Saturn se od Slunce vzdaluje, Jupiter se k němu přibližuje. Později Laplace ukázal, že toto je způsobeno kvaziresonancí 5:2 mezi Saturnem a Jupiterem. Pojem resonance bude podrobně rozebrán v následujících kapitolách.

V r.1781 objevil William Herschel (1738-1822) nové těleso, které považoval za kometu. Pro nás je zajímavé, že Herschelův děd pochazel z Moravy, odkud musel jako protestant odejít do Německa. Sám Herschel pak uprchl do Anglie jako zběh z hannoverské armády za sedmileté války a živil se nejprve jako hudebník. Dráha nové komety však činila matematikům problémy. Teprve Laplace ukázal, že dráha je eliptická s velkou poloosou asi 20 AJ. Tak byla objevena planeta Uran.

Zájem astronomů o planetu Uran se vrátil okolo roku 1840, kdy se její vypočtená dráha rozcházela s 20 let starým výpočtem dráhy o 2'. Vzniká myšlenka, že tato odchylka je způsobena rušením dráhy další planetou za Uranem. Angličan John Couch Adams (1819-1892) provedl rozbor této možnosti a určil možnou dráhu takové rušící planety. Nebyl však brán příliš vážně. Teprve Francouz Urbain Jean Joseph Leverrier (1811-1877) předložil v r. 1846 pařížské akademii podobný výsledek a požádal některé hvězdárny, aby planetu hledali. Hned první večer, 23.září, 1846 našel Galle na hvězdárně v Berlíně těleso asi 1° od předpověděné polohy. To byl objev planety Neptun.

Mezitím 1.ledna 1801 objevil Ital Giuseppe Piazzi v souhvězdí Býka první asteroidu– Ceres. Nejprve se domníval, že jde o kometu. I při tomto objevu již sehrála nebeská mechanika významnou roli. Piazzi pozoroval těleso do 11. února, kdy těžce onemocněl. Než jeho kolegové na hvězdárnách obdrželi zprávu o pozorováních, souhvězdí Býka zmizelo u Slunce a těleso nebylo možno dále pozorovat. Zdálo se, že období pozorování je tak krátké, že dráhu tělesa nebude možno určit. Karl Friedrich Gauss (1777-1855), učitel matematiky v Braunschweigu, vypracoval v té době metodu nejmenších čtverců a novou metodu výpočtu eliptické dráhy. Na základě této metody určil dráhu Piazziho objektu a ten byl přesně za rok po objevu znovuobjeven. Hned v r. 1802 objevil Olbers další planetku (planetka=asteroida) Pallas, v r. 1804 Harding další planetku Juno, a konečně v r. 1807 opět Olbers objevuje Vestu. Počet planetek rychle narůstal a dnes přesahuje počet číslovaných planetek (tj. planetek s dobře známou drahou) počet 9 000.

Další rozvoj nebeské mechaniky byl zaměřen na zpřesňování teorií. V teoriích Měsíce (Delaunay, Brown) se objevují tisíce členů, takže například Delaunayova práce sestává ze dvou tlustých knih (každá má okolo devítiset stran) plných vzorců pro jednotlivé členy. Je zajímavé, že každý člen je očíslován, takže je snadné na takové členy odkazovat. Řešení pro pohyb nebeských těles bývá udáváno ve tvaru Poissonových řad, kde některé proměnné (excentricity a sklony) se objevují ve členu v různých mocninách, zatímco následuje trigonometrická funkce od celočíselné kombinace úhlů.

Pokud jde o pomalý vývoj elementů jednotlivých planet, zformuloval Laplace v r. 1784 soustavu sekulárních rovnic. V tomto problému nejde o okamžitou polohu planet, ale o vývoj jejich excentricit e_j (j zde indexuje j-tou planetu), sklonů I_j, délek perihelu $\tilde{\omega}_j$ a délek vzestupného uzlu Ω_j. Teorie je omezena do prvního řádu v hmotnostech planet a do druhého stupně v excentricitách a sklonech v Hamiltoniánu. To, že velké poloosy zůstávají konstantní dokonce do druhého řádu v hmotnostech planet (bez omezení na stupeň v e a I), ukázal již Poisson v r.1809. Zmíněné změny v poloosách Jupitera a Saturna jsou jen periodické změny s periodou sice dosti dlouhou (900 let), ale nezasahují do sekulárního vývoje (řádově desítky až stovky tisíc let). Laplace zavedl pro každou planetu dvě komplexní čísla $z_j = \exp(\mathrm{i}\,\tilde{\omega}_j)$ a $\xi_j = \sin(I/2)\exp(\mathrm{i}\,\Omega_j)$ a ukázal, že pro tyto veličiny platí soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty (ty závisí jen na hmotnostech planet a jejich středních poloosách). Navíc tyto rovnice jsou separovatelné, takže lze psát

$$\frac{dz}{dt} = \mathrm{i}\,A\ z, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \mathrm{i}\,B\xi,$$

kde A,B jsou reálné čtvercové matice $N \times N$, kde N je počet planet. Řešení takovéto soustavy je

$$z_j = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk} \exp(\mathrm{i}\,g_k t), \qquad \xi_j = \sum_{k=1}^{N} \beta_{jk} \exp(\mathrm{i}\,i s_k t),$$

kde g_k jsou vlastní hodnoty matice A a s_k jsou vlastní hodnoty matice B. Lze ukázat, že v tomto případě jsou všechna g_j, s_j reálná čísla, zatímco vlastní vektory α_{jk}, β_{jk} jsou obecně komplexní. V komplexní rovině tak vektory z a ξ dostáváme jako součet vektorů otáčejících se úhlovými rychlostmi g_j (resp.

s_j), což může poněkud připomínat systém epicyklů. Zde jde však o abstraktní komplexní matematický prostor. Tabulka ukazuje výsledky současných výpočtů frekvencí g_j a s_j založené na Laskarových výpočtech (pro osm planet bez Pluta). Je vidět, že sekulární periody se pohybují zhruba od 45 tisíc do 2 milionů let.

	ν("/rok)	perioda(rok)
g_1	5.596	231 000
g_2	7.456	174 000
g_3	17.365	74 600
g_4	17.916	72 300
g_5	4.249	305 000
g_6	28.221	45 900
g_7	3.089	419 000
g_8	0.667	1 940 000
s_1	-5.618	230 000
s_2	-7.080	183 000
s_3	-18.851	68 700
s_4	-17.748	73 000
s_5		
s_6	-26.330	49 200
s_7	-3.005	431 000
s_8	-0.692	1 870 000

Byl to Henry Poincaré (1854-1912), kdo první ukázal, že nekonečné řady, na jejichž první členy se výpočty nebeské mechaniky omezují, nekonvergují (resp. nekonvergují v žádné otevřené množině počátečních podmínek). Ale tyto objevy již směřují k problémům teorie chaosu, která zvláště v posledních třiceti letech značně ovlivňuje přístup k nebeské mechanice, chápání jejích výsledků a dokonce i způsobu kladení otázek.

Nové výsledky nebeské mechaniky

Ve dvacátém století se objevují tzv. symbolické manipulátory, někdy též poissonovské processory nebo algebraické manipulátory. Jsou to programy, které umí pracovat se symboly a provádět základní operace s Poissonovými řadami. Ty umožňují další zvýšení počtu členů v nebeskomechanických řadách. Např. Laskarova sekulární teorie (sekulární zde znamená, že se zabývá pomalými změnami, krátkoperiodické změny o periodách srovnatelných s periodami planet jsou zde odfiltrovány) obsahuje 150 000 členů. Je to teorie druhého řádu, tj. bere v úvahu členy do druhého stupně v hmotnostech planet a pátého stupně, tj. započítává členy do pátého stupně v excentricitách a sklonech.

Podobné manipulátory se užívají při řešení pohybu umělých družic. Teorie Měsíce byly znovu přepočítány a byly opraveny některé nevýznamné chyby (ve vyšších stupních v excentricitách a sklonech). Současně však byla studována teorie resonancí a chaosu, neboť to jsou zdroje nekonvergence nebeskou mechanikou studovaných řad a bylo třeba ujasnit omezení v použitelnosti takových řad.

Je velmi těžké nastínit vliv teorie chaosu na současnou nebeskou mechaniku jen pro účely úvodního přehledu, bez příslušné matematiky. V krátkosti lze říci, že kromě běžných řešení soustav diferenciálních rovnic, která jsou vyjádřitelná ve tvaru integrálů (nazýváme je řešení regulární), existují takzvaná řešení chaotická, která nelze převést na kvadratury. Protože chaotické řešení nelze zapsat v uzavřeném tvaru, všechna řešení diferenciálních rovnic, která známe ze školských příkladů (např. lineární harmonický oscilátor, problém dvou těles, problém dvou pevných center), jsou řešení regulární. Ta mají tu vlastnost, že při malé změně počátečních podmínek, se příslušná dvě řešení rozbíhají lineárně s časem. Pro chaotická řešení se dvě blízké dráhy rozbíhají s časem exponenciálně. Koeficient λ stojící ve faktoru $\exp(\lambda t)$ charakterizujícím toto rozbíhání se (ne zcela exaktně zavedeno) nazývá Ljapunovův charakteristický exponent a charakterizuje stupeň chaosu. Pro chaotickou dráhu lze tento koeficient určit numericky. Tj. malá změna počátečních podmínek vede brzo k velkému rozdílu v řešeních. Úlohy s jedním stupněm volnosti (kde Hamiltonián navíc nezávisí na čase) mají jen řešení regulární. Některé úlohy se dvěma stupni volnosti, mohou mít také jen regulární řešení, ale takové úlohy jsou jen vyjímečné. Obecně problém se dvěma stupni volnosti má v jisté oblasti i řešení chaotická, která mohou pathologicky prorůstat celý fázový prostor tak, že v žádné otevřené množině nejsou jen řešení regulární. Celkový objem fázového prostoru zaujmutý chaotickými řešeními však může být velmi malý, podobně jako racionální čísla v intervalu $< 0, 1 >$ tvoří množinu míry nula, přesto však neexistuje otevřená podmnožina tohoto intervalu, která by obsahovala jen iracionální čísla.

V nebeské mechanice stojí problém většinou tak, že takzvaný nerušený problém (např. problém Slunce a planety, kde vzájemné působení planet zanedbáme) je integrovatelný tj. má jen regulární řešení. K integrovatelnému Hamiltoniánu přidáme poruchu, která je velmi malá (např. poruchový Hamiltonián charakterizující vzájemné působení planet). Ptáme se, nakolik může malá porucha ovlivnit regularitu řešení. Klíčovou roli v pochopení problému hraje tzv. KAM teorém (Kolmogorov, Arnold, Moser, 1962-63), který tvrdí, že v tomto případě jde fázový objem zaujatý chaotickými řešeními k nule, pokud jde velikost poruchy k nule. Pokud tedy máme metodu, jak nalézt regulární řešení, např. jako řadu, potom tato řada může v regulární oblasti dobře charakterizovat řešení, v oblasti chaotické bude řada divergovat, řešení nebude užitečné, ale taková oblast je malá. Ve skutečnosti však v planetárním systému hmotnosti planet jsou příliš velké, tato porucha není tak malá, jak požaduje KAM teorém. Tj. KAM teorém nedokazuje, že chaotická oblast není významná pro planetární systém.

Pro planetární teorie je významnější Něchoroševův teorém (1977), který tvrdí, že po určitou dobu, která roste exponenciálně s klesající poruchou, lze využít jistých kvaziintegrálů, které se tak po dlouhou dobu skoro zachovávají. Tyto kvaziintegrály lze určit s pomocí prvních členů řad používaných v nebeské mechanice. Nebudeme zde uvádět exaktní matematickou formu Něchoroševova teorému, důležité je , že se ukazuje, že lze využít integrálů, které mohou zůstat konstantní po dobu srovnatelnou s dobou existence sluneční soustavy.

Poincarého důkaz divergence řad nebeské mechaniky v každé otevřené množině počátečních podmínek byl tak prvním upozorněním na existenci chaotických oblastí, i když Poincaré tento termín nepoužíval. Zdálo by se tedy, že když je porucha malá, je vše v pořádku. Pokud ovšem porucha roste, roste i objem chaotické oblasti. V této oblasti nelze nalézt analytické řešení, platí však stále věta o existenci řešení procházejícího každým bodem fázového prostoru, ale toto řešení můžeme hledat jen numerickou integrací. Malá chyba ϵ v konečné representaci reálných čísel na počítači nás však dostává na chybnou, ač blízkou dráhu. Tato dráha exponenciálně utíká od dráhy správné, takže řešení má chybu menší než δ jen pokud $\epsilon \exp(\lambda t) < \delta$ tj. $t < \ln(\delta/\epsilon)/\lambda$. I numerické řešení tedy lze použít jen pro jistou dobu, která je tím kratší, čím je větší Ljapunovův koeficient λ. Místo Ljapunovova koeficientu se často užívá jeho převrácená hodnota Ljapunovův čas T_L. Předchozí úvaha ukazuje, že numerické řešení i při dvojité či čtyřnásobné přesnosti nemohou být spolehlivá po dobu delší než několik desítek Ljapunových časů. U planet je ovšem počáteční chyba způsobena hlavně nepřesnou znalostí počátečních podmínek.

Nedávné výzkumy Laskara, Wisdoma a dalších ukázaly, že dráhy planet ve sluneční soustavě jsou chaotické s Ljapunovým časem $T_L \sim 5$ mil. let pro vnitřní planety a $T_L \sim 20$ mil. let pro planety vnější. To dává odhad použitelnosti numerických integrací. Zatímco má smysl integrovat systém planet po dobu deset milionů let, počáteční chyba vzroste zhruba sedmkrát, integrace po dobu 100 milionů let nemá smysl, počáteční chyba vzroste skor pětsetmilionkrát. Proč se tedy v literatuře objevují integrace po dobu několika Gyr ($10^9 let$)? Tyto integrace nedávají v žádném případě správnou polohu planet (zvláště ne vnitřních). Lze jich však užít pro studium rychlosti difúze proměnných jako jsou excentricity nebo sklony planet. Laskar např. prováděl integraci pro 8 planet po dobu -10 Gyr dozadu a 15 Gyr vpřed a zaznamenával maximální excentricitu pro planety v každém intervalu 10 Myr. Takto dlouhá integrace (delší než existence sluneční soustavy) nahrazuje v jistém smyslu několik integrací s malou změnou počátečních podmínek. Zatímco pro vnější planety zůstávala tato hodnota po celou dobu velmi blízká konstantě, pro Venuši a Zemi se mění jen v rozsahu 0.02, pro Mars již činí difúze této veličiny 0.12 (excentricita nabývá hodnot až 0.2 a pro Merkura je tato difúze 0.4 (excentricita dosahuje hodnoty až 0.50). Je možno argumentovat tak, že ať skutečný vývoj probíhá jinak než integrace, zaznamenané maximální exkurze v excentricitě budou zřejmě reálné, ač třeba nastanou jindy, než ukazuje řešení. Vyplníme-li oblasti, kam se planeta při zjištěném rozsahu excentricit může dostat, dojdeme k závěru, že vnitřní sluneční soustava je v podstatě plná. Navíc oblasti Merkura a Venuše se překrývají, nelze tedy v budoucnu vyloučit jejích blízké setkání, které by pravděpodobně vedlo ke ztrátě Merkura.

V těchto skriptech se pokusíme uvést studenty do klasických problémů nebeské mechaniky. Budeme podrobně studovat teorii poruch a její aplikaci na pohyb planet, planetek, umělých družic a stručně se dotkneme i teorie Měsíce. Budeme studovat souvislost tvaru tělesa s jeho gravitačním polem a popis pohybu těles v poli nepravidelného tělesa. Zavedeme řadu speciálních funkcí, které nebeská mechanika s úspěchem používá. Podrobněji se budeme zabývat problémem tří těles, jeho speciálními řešeními libračními body. Budeme také studovat problém resonancí, jejich souvislost s chaosem a celkový vliv resonancí na strukturu sluneční soustavy. Dotkneme se i problému chaotických drah a metod jejich studia.

Jako hlavní zdroj pro historický přehled v tomto úvodu posloužila kniha: Z. Horský, M. Plavec Poznávání vesmíru, Orbis Praha 1962. Práce zmíněné v oddíle Nové výsledky nebeské mechaniky byly většinou publikovány pouze v časopisech.

Kapitola 1

Vybrané partie z teoretické mechaniky

1.1 Princip nejmenší akce a Lagrangeovy rovnice 2.druhu

Podle německého matematika a filosofa Leibnitze je náš svět nejlepší ze všech možných světů, a proto mohou být přírodní zákony popsány pomocí extremálních principů. Jedním z takových principů je princip nejmenší akce, který tvrdí, že mechanický systém se pohybuje tak, že jistý integrál S (akce soustavy) je extremální.

Konfiguraci takového systému popisujeme pomocí n nezávislých *zobecněných souřadnic* $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Stav systému je tak charakterizován bodem $q \in R^n$ (R^n je prostor n-tic reálných čísel). Předpokládáme, že zobecněné souřadnice jsou voleny fyzikálně rozumným způsobem a při pohybu systému se mění spojitě. Jestliže okamžitý stav systému lze popsat n souřadnicemi, říkáme, že jde o systém s *n stupni volnosti*. Pohyb systému v nějakém časovém intervalu $I \subset R^1$ je potom dán zobrazením $f: I \to R^n$. Každému času $t \in I$ je zobrazením f přiřazena n-tice souřadnic $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$. Obraz množiny I při zobrazení f je $f(I) \subset R^n$ a nazýváme ho *trajektorií v konfiguračním prostoru*. Budeme předpokládat, že funkce $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ jsou dvakrát spojitě diferencovatelné (tj. existují jejich druhé derivace a jsou spojité. První derivace $\dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t)$ pak nazýváme *zobecněné rychlosti*. Princip nejmenší akce potom říká, že každé mechanické soustavě můžeme přiřadit funkci $L(q, \dot{q}, t)$ $(2n + 1)$ proměnných a systém se v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ pohybuje tak, že integrál Stav a pohyb systému

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\, \mathrm{d}t \tag{1.1}$$

nabývá extremální hodnoty. Funkce L se nazývá *Lagrangeova funkce* soustavy neboli Lagrangián. Ve variačním počtu se ukazuje, že podmínkou pro extrém Lagrangián funkcionálu (1.1) jsou rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{1.2}$$

Lagrangeovy rovnice 2.druhu

pro $i = 1, \ldots, n$. Rovnice (1.2) jsou známé v mechanice jako *Lagrangeovy rovnice 2.druhu.* U konzervativních soustav je Lagrangeova funkce rovna rozdílu $T - V$ kinetické a potenciální energie.

Už Newton vyslovil tzv. *Newtonův princip determinovanosti*, podle kterého je pohyb soustavy jednoznačně určen počátečními souřadnicemi a rychlostmi. To samozřejmě souvisí s tím, že Lagrangeovy rovnice (1.2) obsahují nejvýše druhé derivace $\ddot{q}(t)$. Jde tedy o systém n rovnic 2.řádu, jejichž řešení je dáno jednoznačně $2n$ počátečními podmínkami.

Všimněme si ještě, že Lagrangián systému je určen až na derivaci libovolné funkce $F(q,t)$. Definujeme-li

$$L^{'}(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) - \frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t} \quad , \tag{1.3}$$

$$\text{potom} \quad \int_{t_1}^{t_2} L^{'}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t - \Big(F\big(q(t_2),t_2\big) - F\big(q(t_1),t_1\big)\Big) \ , \tag{1.4}$$

tedy akce S (odvozená od L) a $S^{'}$ (odvozená od $L^{'}$) se pro trajektorie začínající v bodě $q(t_1) = a$ a končící v bodě $q(t_2) = b$ liší vždy o konstantu $F(b,t_2) - F(a,t_1)$. Extrém S i $S^{'}$ se tedy realizuje na téže křivce $q(t)$.

1.2 Hamiltonovy kanonické rovnice

Zatímco konfigurace systému je určena n zobecněnými souřadnicemi, jeho dynamický stav, tj. konfigurace spolu s dalším vývojem, je určena $2n$ veličinami. Proto se často zavádí 2n-rozměrný fázový prostor. Stav systému je charakterizován bodem ve fázovém prostoru. Prvních n souřadnic tohoto bodu je n zobecněných souřadnic q_i, druhou n-tici tvoří *zobecněné impulsy* p_i definované vztahem

$$p_i = \frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i,t)}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1,\ldots,n \ . \tag{1.5}$$

Pohyb systému ve fázovém prostoru je charakterizován zobrazením $I \in R^1 \to R^{2n}$. Trajektorie ve fázovém prostoru je potom množina $g(I) \subset R^{2n}$. Zatímco jedním bodem konfiguračního prostoru prochází nekonečně mnoho trajektorií, bodem fázového prostoru prochází v daném okamžiku právě jedna trajektorie. Předpokládejme, že rovnici (1.5) umíme vyřešit vzhledem ke $\dot{q}$. Tedy

$$\left|\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\right| \neq 0 \qquad \text{neboli} \qquad \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right| \neq 0 \quad .$$

Pak

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q,p,t) \quad , \tag{1.6}$$

je opět funkcí $2n+1$ proměnných. Rozumí se tedy $q \in R^n$, $p \in R^n$.

Hamiltonovu funkci, neboli Hamiltonián zavedeme vztahem **Definice**

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad , \tag{1.7}$$

---

kde všechna $\dot{q}_i$ napravo vyjádříme z (1.6) pomocí q, p. Potom je

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \quad .$$

Členy s $\mathrm{d}\dot{q}_i$ se vyruší díky definici zobecněných impulsů.Užitím Lagrangeových rovnic (1.2) na člen u $\mathrm{d}q_i$ dostaneme

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t \quad . \tag{1.8}$$

Odtud dostáváme *Hamiltonovy kanonické rovnice* ve tvaru

Hamiltonovy kanonické rovnice

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.9}$$

Pro vztah mezi derivacemi Hamiltoniánu a Lagrangiánu podle času dává (1.8) vztah

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \tag{1.10}$$

Hamiltonovy kanonické rovnice můžeme chápat jako podmínky pro extrém funkcionálu

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum p_i \dot{q}_i - H(q_j, p_j, t) \right] \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t \quad , \tag{1.11}$$

kde funkce pod integrálem je funkcí $4n+1$ proměnných $q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i, t$. Není podstatné, že naše funkce fakticky na $\dot{p}$ nezávisí. Podobně jako z extrému (1.1) (kde funkce pod integrálem závisela kromě času na $2n$ proměnných) plynulo n rovnic (1.2), z extrému (1.11) (kde pod integrálem máme funkci, která kromě času závisí na $4n$ proměnných) dostaneme $2n$ rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - H \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - H \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{p}_i} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - H \right) - \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - H \right) = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad ,$$

což jsou právě Hamiltonovy kanonické rovnice. Této skutečnosti využijeme v odvození podmínek, kde je transformace souřadnic a impulsu kanonická.

1.3 Kanonické transformace

Přejděme transformací zobecněných souřadnic a impulsů p_i, q_i

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_j, P_j, t) \qquad i,j = 1,2,\ldots,n \\ p_i &= p_i(Q_j, P_j, t) \end{aligned} \tag{1.12}$$

k novým souřadnicím a impulsům Q_j, P_j. Předpokládejme dále, že příslušný determinant je nenulový a zobrazení (1.12) má inverzní zobrazení

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_j(q_i, p_i, t) \\ P_j &= P_j(q_i, p_i, t) \quad . \end{aligned} \tag{1.13}$$

Podmínku existence inverzního zobrazení je možno snáze zapsat, zavedeme-li označení $(z_1, z_2, \ldots, z_{2n}) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ a podobně $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2n}) = (Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n)$. Matice transformace (1.12) je potom

$$M_{kj} = \frac{\partial z_k}{\partial Z_j} \tag{1.14}$$

neboli

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial Z_1} & \frac{\partial z_1}{\partial Z_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial Z_{2n}} \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial z_{2n}}{\partial Z_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial z_{2n}}{\partial Z_{2n}} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Předpokládáme tedy, že

$$|M| \neq 0 \quad . \tag{1.16}$$

Nechť dále platí (1.9) a ptáme se, jaké podmínky musí splňovat transformace (1.12), aby i pro nové proměnné platilo

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \overline{H}(Q,P,t)}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \overline{H}(Q,P,t)}{\partial Q_i} \tag{1.17}$$

s nějakou novou funkcí $\overline{H}(Q,P,t)$. Pokud platí rovnice (1.17), nazýváme transformaci (1.12) transformací kanonickou, nové souřadnice a impulsy nazýváme opět kanonické proměnné a $\overline{H}$ je nový Hamiltonián systému. Je-li transformace (1.12) kanonická, nabývá vedle funkcionálu S v (1.11) extrému i funkcionál

$$\overline{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(Q_j, P_j, t) \right) \mathrm{d}t \quad . \tag{1.18}$$

Pokud bychom do (1.18) dosadili q_i, p_i z (1.13), musejí rovnice pro extrém funkcionálu vést na stejné křivky jako rovnice pro extrém (1.11). Podobně jako ve (1.3) budeme tedy rozdíl podintegrálních výrazů hledat jako derivaci nějaké funkce $F^{'}(q,p,t)$, která musí nyní záviset na $4n+1$ proměnných.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(Q_j, P_j, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q_j, p_j, t) - \\ - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F^{'}(q,p,t) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Rovnost (1.19) platí ovšem nejen při dosazení za Q_i, P_i z (1.13), ale můžeme v ní díky souvislosti mezi p_i, q_i a Q_i, P_i zavést jiné dvojice proměnných, např. q_i, P_i a pomocí transformačních rovnic vyjádřit i $Q_j(q_i, P_i)$, $p_j(q_i, P_i)$. Pak je ovšem i F' pouze funkcí $F_1'(q_i, P_i, t)$. Označili jsme ji indexem 1, abychom zdůraznili, že jde o jinou funkční závislost funkce F na jejich třech proměnných, i když samozřejmě

$$F_1'(q_j, P_j, t) = F'\,(q_j, p_j(q,P), t) \quad . \tag{1.20}$$

Rovnici (1.19) pak přepíšeme

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \mathrm{d}Q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i = (\overline{H} - H)\mathrm{d}t - \mathrm{d}F_1' \quad , \tag{1.21}$$

tedy

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i\right) - \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathrm{d}P_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i + (H - \overline{H})\mathrm{d}t = -\mathrm{d}F_1' \quad .$$

Konečně položíme-li

$$F_1 = F_1' + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i \quad ,$$

dostaneme

$$\mathrm{d}F_1 = \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathrm{d}P_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i + (\overline{H} - H)\mathrm{d}t \quad , \tag{1.22}$$

odkud

$$Q_i = \frac{\partial F_1(q,P,t)}{\partial P_i} \quad , \qquad p_i = \frac{\partial F_1(q,P,t)}{\partial q_i} \tag{1.23}$$

a

$$\overline{H} = H + \frac{\partial}{\partial t} F_1 \quad . \tag{1.24}$$

Podaří-li se nám tedy nalézt takovou funkci $F_1(q, P, t)$ starých souřadnic, nových impulsů a času, že vztahy (1.12) mezi novými a starými souřadnicemi je možno vyjádřit rovnicemi (1.23), pak je transformace (1.12) kanonická a nový Hamiltonián je dán vztahem (1.24). Naprosto stejně jsme mohli za rovnicí (1.19) zavést místo $F_1'(q, P, t)$ funkci $F_2'(p, Q, t)$ nebo $F_3'(q, Q, t)$, nebo $F_4'(p, P, t)$ a vyjít z jiné dvojice proměnných než q, P. Odpovídající vzorce pak ukazuje následující schéma:

$$\begin{array}{llll}
F_1(q,P,t) \; : & p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} & Q_i = \frac{\partial F_1}{\partial P_i} & \overline{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\
F_2(p,Q,t) \; : & q_i = -\frac{\partial F_2}{\partial p_i} & P_i = -\frac{\partial F_2}{\partial Q_i} & \overline{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\
F_3(q,Q,t) \; : & p_i = \frac{\partial F_3}{\partial q_i} & P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} & \overline{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \\
F_4(p,P,t) \; : & q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} & Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} & \overline{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}
\end{array}$$

Jinou možnost důkazu toho, že transformace je kanonická, dává přímo rovnice (1.21). Dokážeme-li např., že $\sum P_i \mathrm{d}Q_i - \sum p_i \mathrm{d}q_i$ je úplným diferenciálem nějaké funkce $F'(q,p,t)$, pak je transformace kanonická a $H = \overline{H}$. Pro transformaci

$$q = \sqrt{2P}\sin Q \quad ,$$
$$p = \sqrt{2P}\cos Q \quad , \tag{1.25}$$

máme

$$P\,\mathrm{d}Q - p\,\mathrm{d}q = P\,\mathrm{d}Q - \sqrt{2P}\cos Q\left(\frac{1}{\sqrt{2P}}\sin Q\,\mathrm{d}P + \sqrt{2P}\cos Q\,\mathrm{d}Q\right) =$$

$$= \left(1 - 2\cos^2 Q\right) P\,\mathrm{d}Q - \cos Q\sin Q\,\mathrm{d}P = \mathrm{d}\left(-P\cos Q\sin Q\right) \quad .$$

Transformace (1.25) je tedy *kanonická*. Přitom nevadí, že nalezená funkce $(-P\cos Q\sin Q)$ je vyjádřena v proměnných Q, P a nikoli q, p. Přechod ke q, p by bylo možno pomocí (1.25) vždy udělat a dostali bychom funkci $(-1/2pq)$. Transformace (1.25) se v nebeské mechanice často využívá.

1.4 Lagrangeovy a Poissonovy závorky

Další možnost dokázat, že transformace (1.12) je kanonická, poskytují Lagrangeovy nebo Poissonovy závorky.

Definice

Máme-li dvě funkce zobecněných souřadnic impulsů a času $f(q,p,t)$, $g(q,p,t)$, potom jejich Poissonovy závorky jsou definovány vztahem

$$(f;g) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) \quad . \tag{1.26}$$

Zavedeme-li $z \in R^{2n}$, $Z \in R^{2n}$ o složkách $z_1, \ldots, z_{2n}$, $Z_1, \ldots, Z_{2n}$ stejně jako na začátku odstavce 1.3, můžeme transformaci (1.12) zapsat jednodušeji

$$z = z(Z,t) \quad . \tag{1.27}$$

Vztah (1.14) potom definuje matici M této transformace. Inverzní transformace (1.13) je podobně

$$Z = Z(z,t) \quad . \tag{1.28}$$

Derivací identity $Z = Z(\,z(Z,t), t\,)$ podle Z_i se snadno přesvědčíme, že inverzní maticí k M je matice inverzního zobrazení

$$\left(M^{-1}\right)_{kj} = \frac{\partial Z_k}{\partial z_j} \quad . \tag{1.29}$$

Zaveďme dále matici J typu $2n \times 2n$ schématem

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E^{(n)} \\ -E^{(n)} & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{1.30}$$

kde $E^{(n)}$ je jednotková matice typu $n \times n$, tj. $E^{(n)}_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} je Kroneckerovo delta, které je rovno 1 pro $i = j$ a jinak je nulové). Nula v (1.30) reprezentuje matici typu $n \times n$ ze samých nul. Všimněme si, že

$$J.J = -E^{(2n)} \quad \text{neboli} \quad J^{-1} = -J \quad . \tag{1.31}$$

Chápeme-li $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)$ jako $2n$ rozměrné sloupcové vektory o složkách $\frac{\partial f}{\partial z_1} \dots \frac{\partial f}{\partial z_{2n}}$, resp. $\frac{\partial g}{\partial z_1} \dots \frac{\partial g}{\partial z_{2n}}$, potom Poissonovy závorky zapíšeme [1]

$$(f;q) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^T . J . \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right) \quad . \tag{1.32}$$

Definice

Jsou-li zobecněné souřadnice a impulsy funkcí dvou parametrů u, v (případně i dalších parametrů), můžeme definovat Lagrangeovy závorky

$$[u;v] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u} \right) \quad . \tag{1.33}$$

Označíme-li sloupcový vektor o složkách $\frac{\partial z_i}{\partial u}$ symbolem $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ a podobně zavedeme sloupcový vektor $\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$, potom

$$[u;v] = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^T J \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \quad . \tag{1.34}$$

Pro transformaci (1.27) tvoří matice Lagrangeových závorek tzv. *Lagrangeovu matici transformace*

Lagrangeova matice transformace

$$\mathcal{L}_{ij} = [Z_i; Z_j] = (M^T J M)_{ij} \quad , \tag{1.35}$$

neboli

$$\mathcal{L} = M^T J M \quad , \tag{1.36}$$

kde M je matice transformace (1.14). Protože $J^T = -J$ je i L maticí antisymetrickou

$$\mathcal{L}^T = \left(M^T J M\right)^T = M^T J^T (M^T)^T = M^T (-J) M = -\mathcal{L} \quad . \tag{1.37}$$

[1] Horní index T označuje transponovanou matici, tedy ze sloupcového vektoru dostaneme transpozicí vektor řádkový.

Všimněme si, že provedeme-li dvě transformace typu (1.27) za sebou, tj. $p, q \to P^{(1)}, Q^{(1)} \to P^{(2)}, Q^{(2)}$ a matice první transformace je M_1 a matice druhé transformace M_2, potom matice výsledné transformace $p, q \to P^{(2)}, Q^{(2)}$ bude

$$M \;=\; M_1 \,.\, M_2 \tag{1.38}$$

Lagrangeova matice výsledné transformace bude

$$\mathcal{L} = M^T\, J\, M = M_2^T M_1^T\, J\, M_1 M_2 = M_2^T\, \mathcal{L}_1\, M_2^T \quad . \tag{1.39}$$

Tvrzení. *Transformace (1.27) je kanonická, právě když pro její Lagrangeovu matici platí*

$$\mathcal{L} \;=\; \mu \,.\, J \quad , \tag{1.40}$$

kde μ je reálná konstanta $\mu \neq 0$. [2]

Všimněme si, že z (1.40) plyne užitím (1.39), že složením dvou kanonických transformací vzniká opět kanonická transformace. Proveďme důkaz tvrzení:

Transformace je kanonická právě když existuje funkce F tak, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(Q_i, P_i, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) - \frac{\mathrm{d}F(Q, P, t)}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{1.42}$$

Vezmeme-li

$$\mathrm{d}q_i = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \mathrm{d}Q_k + \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \mathrm{d}P_k \right) \quad ,$$

dostaneme

$$\mathrm{d}F(Q, P, t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} p_i - P_j \right) \mathrm{d}Q_j \;+\; \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \mathrm{d}P_k \;+$$
$$+\; \left(\overline{H} - H \right) \mathrm{d}t \quad .$$

Podmínka pro to, aby lineární diferenciální forma $\mathrm{d}F(Q, P, t)$ byla úplným diferenciálem, je

$$\frac{\partial}{\partial P_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} p_i - P_j \right) = \frac{\partial}{\partial Q_j} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_k}$$

$$[Q_j, P_k] = \delta_{jk}$$

[2] Výskyt faktoru μ není podstatný, je možno jej chápat jako důsledek volby škály, např. v impulsech. Provedeme-li transformaci

$$p = \mu P \quad , \quad q = Q \quad (\text{ovšem i} \quad H = \mu \overline{H}) \quad , \tag{1.41}$$

vidíme, že kanonické rovnice se přenášejí i na čárkované veličiny a Lagrangeova matice transformace $p, q \to P, Q$ je právě μJ. Vhodnou volbou škály v impulsech je vždy možno položit $\mu = 1$. Často právě jen transformace s $\mu = 1$ se považují za kanonické. Uvážení $\mu \neq 1$ vede k zobecnění pojmu kanonická transformace zahrnutím transformace (1.41). V dalším budeme užívat transformace s $\mu = 1$, pokud nebude výslovně uvedeno jinak.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k}-\frac{\partial q_i}{\partial P_k}\frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\right)=\delta_{jk}$$

Vzhledem k antisymetrii Lagrangeových závorek je matice L antisymetrická, tj. je dokázána ekvivalence kanoničnosti a vztahu

$$\mathcal{L}=J \quad ,$$

tj.

$$M^T\,J\,M=J \tag{1.43}$$

Čemu se rovná $\det(M)$? Nejprve ukážeme indukcí, že $\det E^{(n)}=1$:

1.
$$n=1 \quad , \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1 \quad ,$$

2.
$$\begin{vmatrix} 0 & E^{(n)} \\ -E^{(n)} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & E^{(n-1)} \\ -E^{(n)} & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^{n+1}(-1)(-1)^n \begin{vmatrix} 0 & E^{(n-1)} \\ -E^{(n-1)} & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad ,$$

tudíž $\quad \det(M^T)\det(M)=1$,

$$|\det(M)|^2=1 \quad . \tag{1.44}$$

Kanonické transformace ($\mu = 1$) zachovávají fázový objem $\Rightarrow$ integrální vyjádření Liouvilleova teorému, neboť platí následující teorém :

Teorém. Mějme Hamiltonovu úlohu s H a počáteční podmínky q_0, p_0. Nechť známe řešení $q(t), p(t)$, pak transformace $(q_0,p_0)\rightarrow(q(t),p(t))$ ("zprostředkovaná řešením Hamiltonových rovnic") je kanonická.

Důkaz:
Pro $t=0$ jde o identickou transformaci $\rightarrow$ triviálně kanonická. Spočtěme Poissonovy závorky pro $t\neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q_i(t);p_j(t)) = (\,\dot{q}_i(t);p_j(t)\,)+(\,q_i(t);\dot{p}_j(t)\,) =$$

$$= ((q_i;H);p_j)+(q_i;(p_j;H)) = ((q_i,p_i),H)$$

$\Rightarrow$ veličina (q_i,p_i) se podél řešení kanonických rovnic nemění, tudíž

$$(\,q_i(t);p_j(t)\,)=(\,q_i(0);p_j(0)\,)=\delta_{ij} \quad .$$

Transformace je opravdu kanonická, protože podobně jako jsme pomocí Lagrangeových závorek zavedli Lagrangeovu matici transformace, můžeme zavést pomocí Poissonových závorek Poissonovu matici $\mathcal{P}$ transformace. V tomto případě vyjdeme ze vztahu (1.28) a definujeme

$$(\mathcal{P})_{ij} = (Z_i, Z_j) = \left(\frac{\partial Z_i}{\partial z}\right)^T J \left(\frac{\partial Z_j}{\partial z}\right) = \left(M^{-1}\, J \left(M^{-1}\right)^T\right)_{ij} \tag{1.45}$$

Poissonova matice transformace

neboli

$$\mathcal{P} = M^{-1}\, J \left(M^{-1}\right)^T \quad . \tag{1.46}$$

Okamžitě je vidět, že

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\,\mathcal{L} &= M^{-1}J(M^{-1})^T M^T JM = M^{-1}J(MM^{-1})^T JM = \\ &= M^{-1}J^2 M = -E^{(2n)} \quad . \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$-\mathcal{P} = \mathcal{L}^{-1} \quad . \tag{1.48}$$

Tedy $(-\mathcal{P})$ je inverzní maticí k matici $\mathcal{L}$. Transformace (1.27) je kanonická právě když platí (1.40). Potom $\mathcal{P} = \mathcal{L}^{-1} = -J^{-1} = J$. Obdobou tvrzení (1.40) (tj. podmínka kanoničnosti) bude:

Transformace (1.27) je kanonická právě když

$$\mathcal{P} = J \quad . \tag{1.49}$$

Symplektické matice

Poznamenejme ještě, že maticím splňujícím rovnici (1.43) říkáme *symplektické*. Matice kanonické transformace tudíž musí být symplektická. Snadno vidíme, že je-li

$$M_1^T J M_1 = J \quad , \qquad M_2^T J M_2 = J \quad ,$$

pak i

$$(M_1M_2)^T J(M_1M_2) = M_2^T M_1^T\, J\, M_1 M_2 = M_2^T J\, M_2 = J \quad ,$$

tedy i součin dvou symplektických matic je symplektická matice. Vezmeme-li za M_2 matici inversni k M_1 tj. M_1^{-1} a matice M_1 je symplektická, pak je $M = E^{(2n)}$. M je tedy symplektická a tedy i M^{-1} je symplektická. Inversní transformace (jejíž matice je M^{-1}) ke kanonické transformaci je opět kanonická transformace. Protože i jednotková matice je symplektická, vidíme, že symplektické matice tvoří grupu.

Jak tedy otestujeme kanoničnost transformace? Spočteme matici Lagrangeových (nebo Poissonových) závorek (v libovolném směru) a splňuje-li $\mathcal{L}, \mathcal{P} \simeq J$ pak je kanonická a obráceně.

1.5 Hamilton-Jacobiho rovnice

Hledejme vytvořující funkci $F(q, P, t)$ (tj. takovou transformaci), že

$$\overline{H} = 0 \quad . \tag{1.50}$$

Potom jsou nové souřadnice a impulsy stále konstantní jako důsledek (1.17). Podle (1.24) máme tedy triviální řešení

$$\overline{H} = H(q,p,t) + \frac{\partial F(q,P,t)}{\partial t} = 0 \quad , \tag{1.51}$$

dosazením z (1.23)

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}$$

dostáváme Hamilton-Jacobiho rovnici

Hamilton-Jacobiho rovnice

$$H(q, \frac{\partial F}{\partial q}(q,P,t),t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q,P,t) = 0 \quad . \tag{1.52}$$

Řešení této rovnice hledáme jako funkci $F(q,P,t)$ n zobecněných souřadnic q, n konstant P a času. V termínech teorie diferenciálních rovnic to znamená, že nehledáme obecný integrál parciální diferenciální rovnice (1.52), ale jen úplný integrál, tj. funkci závislou na $n+1$ proměnných a $n+1$ konstantách. Ve skutečnosti stačí n konstant, protože nalezneme-li takové řešení $F(q,P,t)$, pak poslední konstantu můžeme prostě přičíst a $F(q,P,t)+C$ je úplný integrál. Řešení Hamilton-Jacobiho rovnice se zjednoduší, nezávisí-li H explicitně na čase. Času v H se můžeme ostatně vždy zbavit přidáním jednoho stupně volnosti. Můžeme totiž definovat kanonický problém s novým Hamiltoniánem nezávislým na čase

$$H'(q,q_{n+1},p,p_{n+1}) = H(q,p,q_{n+1}) + p_{n+1} \quad , \tag{1.53}$$

pak je $\dot{q}_{n+1} = 1$, tedy souřadnice q_{n+1} plyne stejně jako čas.

Pokud umíme najít řešení Hamiltonových rovnic pro Hamiltonián (1.52), nalezli jsme i řešení původního systému. Pokud tedy H nezávisí explicitně na čase, je H integrálem pohybu, jak plyne ze vztahu

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{1.54}$$

Členy s $\dot{p}$ a $\dot{q}$ se vyruší díky Hamiltonovým kanonickým rovnicím. Díky předpokladu o explicitní nezávislosti H na čase je pak $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Tedy

$$H(q,p) = E \quad .$$

V případě nezávislosti Hamiltoniánu na čase můžeme psát $F = -Et + F_0(q,P)$ a dosadíme do (1.52).

$$H\left(q, \frac{\partial F_0}{\partial q}\right) = E \quad . \tag{1.55}$$

Řešení Hamilton-Jacobiho rovnice je možno snadno nalézt, je-li hamiltonián např. ve tvaru

$$H = f_3(q_3,p_3,f_2(q_2,p_2,f_1(q_1,p_1))) \quad . \tag{1.56}$$

Patří sem např. potenciál typu

$$V(r) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2\theta} \quad ,$$

neboť kinetický člen je

$$\frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) \quad .$$

Probereme tento důležitý případ kam spadá i centrální potenciál, s nímž se setkáme v případě problému dvou těles. Hamilton-Jacobiho rovnice

$$f_3(q_3, \frac{\partial F_0}{\partial q_3}, f_2(q_2, \frac{\partial F_0}{\partial q_2}, f_1(q_1, \frac{\partial F_0}{\partial q_1}))) = E \tag{1.57}$$

a předpokládáme separaci

$$F_0 = F_1(q_1, P_1) + F_2(q_2, P_1, P_2) + F_3(q_3, P_2, P_3)$$

Rovnost (1.57) říká, že jistá funkce $\Phi(q_1, q_2, q_3) = E$ všude. Fixujeme tedy q_2, q_3, měnící se q_1 nesmí porušit tuto rovnici $\Rightarrow$ rozklad na diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} f_1(q_1, \frac{\partial F_1}{\partial q_1}) &= P_1 \rightarrow F_1 \quad , \\ f_2(q_2, \frac{\partial F_2}{\partial q_2}, P_1) &= P_2 \rightarrow F_2 \quad , \\ f_3(q_3, \frac{\partial F_3}{\partial q_3}, P_2) &= P_3 \rightarrow F_3 \quad , \end{aligned}$$

tj. $P_3 = E$.[3] Nové souřadnice jsou nyní

$$Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} = \frac{\partial F_0}{\partial P_i} = \text{konst.} \quad .$$

$\Rightarrow$ souhrn : obecné řešení hledané úlohy (s takto separovatelným hamiltoniánem) je v implicitním tvaru dáno :

$$p_k = \frac{\partial F}{\partial q_k} = \frac{\partial F_k}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\mathrm{d}F_k}{\mathrm{d}q_k}}{\sqrt{\Phi_k(q_k, P_k, P_{k-1})}} \mathrm{d}q_k = \Psi_k(q_k, P_k, P_{k-1}) \quad ,$$

[3]Typicky – v klasické mechanice – jsou impulsy kvadratickou diagonální formou v hybnostech, proto tyto rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2 &= \Phi_1(q_1, P_1) \quad , \quad F_1(q_1, P_1) = \int \sqrt{\Phi_1(q_1, P_1)}\,\mathrm{d}q_1 \\ \left(\frac{\mathrm{d}F_k}{\mathrm{d}q_k}\right)^2 &= \Phi_k(q_k, P_k, P_{k-1}) \quad , \quad F_k(q_k, P_k, P_{k-1}) = \int \sqrt{\Phi_k(q_k, P_k, P_{k-1})}\,\mathrm{d}q_k \end{aligned}$$

kde $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$\begin{aligned} Q_k = \frac{\partial F}{\partial P_k} \quad , Q_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial P_1}(q_1, P_1) = \Omega_1(q_1, P_1), \\ Q_k &= \frac{\partial F_{k+1}}{\partial P_k}(q_{k+1}, P_{k+1}, P_k) + \frac{\partial F_k}{\partial P_k}(q_k, P_k, P_{k-1}) = \\ &= \Omega_{k+1}(q_{k+1}, P_{k+1}, P_k) + \Omega_k(q_k, P_k, P_{k-1}) \\ & \quad k = 2, 3, \ldots, n-1 \quad , \\ Q_n &= \frac{\partial F}{\partial P_n} = t + \frac{\partial F_n}{\partial P_n}(q_n, P_n, P_{n-1}) = \\ &= t + \Omega_n(q_n, P_n, P_{n-1}) \quad . \end{aligned}$$

Kdybychom vzali F_0 místo F, pak Q_n nebude konstantní nýbrž lineární funkce času, časový vztah se přenese z transformace $q_n \to Q_n$ do časové proměnnosti Q_n.

1.6 Částice v jednorozměrném potenciálovém poli

Částice o hmotnosti m v jednorozměrném potenciálovém poli představuje systém s jedním stupněm volnosti. Potenciální energie $\tilde{U}(q)$ závisí na jediné souřadnici q. Budeme předpokládat, že $\tilde{U}(q)$ je diferencovatelná funkce q, lagrangián je potom

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \tilde{U}(q) \quad , \tag{1.58}$$

zobecněný impuls,

$$\tilde{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad , \tag{1.59}$$

a hamiltonián

$$\tilde{H} = \tilde{p}\dot{q} - L = \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \tilde{U}(q) \quad . \tag{1.60}$$

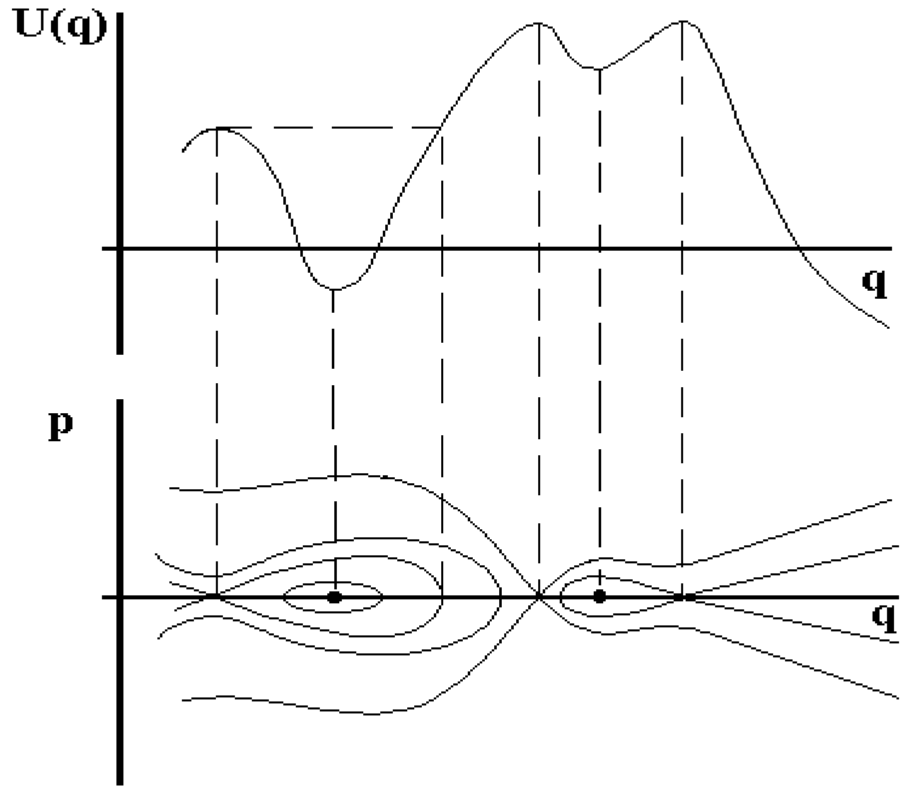
Protože potenciální energie je většinou (v případě pouze gravitačního působení vždy) úměrná m, zavedeme

$$U(q) = \frac{\tilde{U}(q)}{m} \quad , \quad p = \frac{\tilde{p}}{m} \quad , \quad H = \frac{\tilde{H}}{m} \quad . \tag{1.61}$$

Poslední dva vztahy představují transformaci typu (1.41). Nový hamiltonián

$$H = \frac{p^2}{2} + U(q) \tag{1.62}$$

a $p = \dot{q}$. Pokud $U(q)$ už dále nezávisí na m (případ gravitačního působení), vidíme, že pohyb částice nezávisí na její hmotnosti. Na obr. 1.1 jsou schematicky znázorněny fázové křivky neboli trajektorie ve fázovém prostoru. Jsou zakresleny pod grafem průběhu $U(q)$ tak, aby bylo vidět odpovídající si vlastnosti.



Obrázek 1.1: Trajektorie ve fázovém prostoru pro jednorozměrný potenciál $U(q)$

Protože $H = E$ je integrál pohybu, můžeme vyjádřit

$$p = \pm \left[2 \left(E - U(q) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{1.63}$$

Křivka hladiny energie

Množina bodů fázového prostoru, pro které platí (1.63) pro dané E, se nazývá ***křivkou hladiny energie.*** Z obr. 1.1 je zřejmé, že tato křivka může zahrnovat několik trajektorií. Uveďme některé vlastnosti fázových křivek a křivek hladiny energie.

1. Pro danou hodnotu E může pohyb probíhat jen v oblasti, kde $E \geq U(q)$.

2. Křivky hladiny energie jsou symetrické podle osy q.

3. Body, kde $U(q)$ má maximum nebo minimum a $p = 0$, jsou stacionární body. Trajektorie je tvořena tímto jediným bodem. Neboť

$$\ddot{q} = \partial_q U(q)|_{q_0} = 0 \quad \text{a} \quad \dot{q}_0 = 0 \quad .$$

4. Je-li $E = U(q_0)$ a $(q_0, 0)$ není stacionární bod, pak

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{q_0} = \pm\infty \quad . \tag{1.64}$$

Body q_0 jsou body obratu trajektorie s daným E. V těchto bodech je $p = \dot{q} = 0$ a mění znaménko.

5. Je-li $(q_0, 0)$ stacionární bod odpovídající minimu $U(q)$, pak jeho dostatečně malé okolí ve fázovém prostoru neobsahuje žádný bod křivky úrovně téže energie. Pro blízké vyšší energie jsou fázové křivky uzavřené okolo stacionárního bodu. Při malém vychýlení stacionárního bodu zůstává vychýlený bod trvale v blízkém okolí tohoto bodu. Proto stacionární bod odpovídající minimu nazýváme stabilní stacionární bod a odpovídající konstantní řešení stabilním *stacionárním řešením.* Stacionární řešení

6. Je-li $(q_0, 0)$ stacionární bod odpovídající maximu $U(q)$, pak v libovolném okolí existují další body křivky úrovně téže energie. Odpovídající trajektorie ovšem neobsahuje bod $(q_0, 0)$, který sám je samostatnou trajektorií. Tuto trajektorii jdoucí libovolně blízko ke stacionárnímu bodu a patřící téže křivce hladiny energie nazýváme *separatrixou.* Směrnice tečny k této křivce hladiny energie v bodě q_0 je dána $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$: Separatrix

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = \frac{\dot{p}\ \mathrm{d}t}{\dot{q}\ \mathrm{d}t} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial q}}{\frac{\partial H}{\partial p}} = -\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)}{p} \quad ,$$

což je ovšem výraz typu 0/0. Použitím L'Hospitalova pravidla obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = -\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right)^2 = -\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = \pm\sqrt{-\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q_0}} \tag{1.65}$$

7. Z Hamiltonovy kanonické rovnice $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = p$ dostaneme

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{p(q, E)}\mathrm{d}q \quad .$$

Byla-li v čase t_0 souřadnice $q = q_0$, potom

$$t - t_0 = \pm\int_{q_0}^{q} \frac{\mathrm{d}q}{\left[2\,(\,E - U(q)\,)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad . \tag{1.66}$$

Tento integrál je základem řešení (obecné řešení) všech jednorozměrných úloh. V případě neasymptotickém (rovnice $E - U(q) = 0$ má dva kořeny

α, β a $q_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle)$ je řešení periodické, $q(t)$ tedy můžeme hledat ve tvaru Fourierova rozvoje. Přejdeme-li od $t \to \tilde{t}$

$$t = t(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} G(q(t^*))\,\mathrm{d}t^* \quad ,$$

kde

$$G(q) = \left[\frac{(\beta - q)(q - \alpha)}{2(E - U(q))} \right]^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

potom

$$\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tilde{t}} \right)^2 = (\beta - q)(q - \alpha)$$

s jednoduchým řešením

$$q = \frac{1}{2}(\beta + \alpha) - \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \cos \tilde{t} \quad .$$

Jelikož $q(\tilde{t})$ je jednoduše periodická funkce (sudá), lze rozvinout G do tvaru

$$G(q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \nu_n \cos n\tilde{t} \quad , \quad \text{kde}$$

$$\nu_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G(\,q(\tilde{t})\,)\, \cos n\tilde{t}\, \mathrm{d}\tilde{t}$$

a řešení zbývající rovnice je

$$t = \nu_0 \tilde{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin n\tilde{t} \quad , \quad \lambda_n = \frac{2\nu_n}{n} \quad .$$

Tedy algoritmus řešení:

(a) nalezení (α, β)

(b) nalezení $E = H(p,q)|_0$

(c) $q = \frac{1}{2}(\beta + \alpha) - \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \cos \tilde{t}$

(d) nalezení Fourierova rozvoje

$$\nu_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{(\beta - q)(q - \alpha)}{2(E - U(q))} \right]^{\frac{1}{2}} \cos n\tilde{t}\, \mathrm{d}\tilde{t} \quad ,$$

kde $q = q(\tilde{t})$

(e) pak $t = t(\tilde{t}) = \nu_0 \tilde{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin n\tilde{t}$, $\lambda_n = 2\nu_n / n$

Pro dostatečně rozumnou třídu potenciálů se dá ukázat stejnoměrná konvergence všech těchto řad (stejně tak lze nalézt asymptotické typy řešení $q \sim t^\alpha$, α pro $q \to \infty \ldots$). Perioda nalezeného řešení je

$$T = 2 \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}q}{[\,2\,(\,E - U(q)\,)\,]^{\frac{1}{2}}} \quad . \tag{1.67}$$

8. Je-li E_0 energie odpovídající minimu funkce $U(q)|_{q=q_0}$, který je stabilním stacionárním bodem, pak platí

$$T(E \to E_0) \;\to\; \frac{2\pi}{\sqrt{+U''(q_0)}} \quad ,$$

kde druhá derivace potenciálu podle q je určena ve stacionárním bodě q_0. Interpretace: perioda malých kmitů kolem rovnovážné polohy — u malých kmitů matematického kyvadla

$$U \;=\; -\frac{1}{2}\omega^2 \cos\Phi$$

$$U''(0) = \omega \quad\Rightarrow\quad T_{\text{malých kmitů}} \simeq \frac{2\pi}{\omega}$$

nezávisí na amplitudě.[4]

9. Případ matematického kyvadla (p, Φ) (obr.1.2):

$$H = \frac{1}{2}p^2 - k\ \cos\Phi = E$$

   (a) Pro $E < k$ jde o periodický pohyb s

$$T_E = 2 \int_0^{\tilde{\Phi}} \frac{\mathrm{d}\Phi}{[\,2\,(\,E - k\cos\Phi\,)\,]^{\frac{1}{2}}} \quad ,$$

   kde $\tilde{\Phi}$ řeší $-k\cos\tilde{\Phi} = E$ a $\Phi \in \langle -\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi})$.

   (b) Pro $E > k$ jde o řešení s Φ monotónně rostoucím nebo klesajícím.

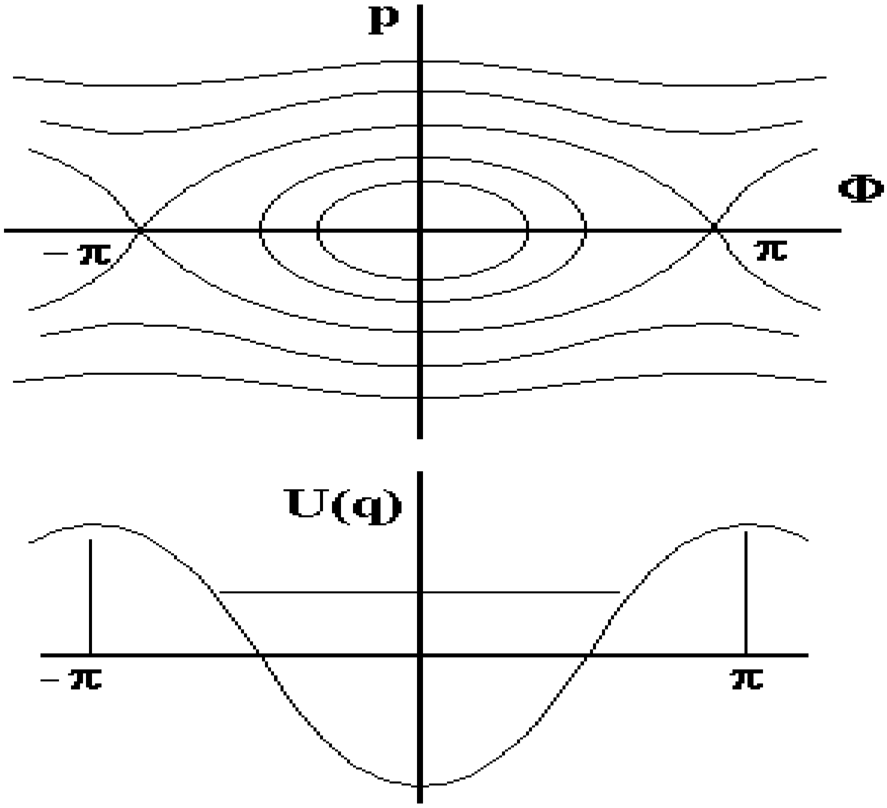
   (c) Separatrix má rovnici ($E = k$):

$$p = \sqrt{2k}\,\sqrt{1 + \cos\Phi} \quad ,$$

   podle (1.65)

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\Phi}\right|_{\Phi=\pm\pi} = \pm\sqrt{-k\cos\Phi}\,|_{\Phi=\pm\pi} = \pm\sqrt{+k} \quad .$$

[4] Viz Galileova lampa v Pisanském dómu.



Obrázek 1.2: Plné matematické kyvadlo

10. Hamilton-Jacobiho rovnice (1.55) pro hamiltonián (1.62) dává pro $p > 0$

$$\frac{\partial F_0}{\partial q} = +\sqrt{2(E - U(q))} \quad , \tag{1.68}$$

tedy

$$F_0 = \int_{q_0}^{q} \sqrt{2(E - U(q))}\, \mathrm{d}q \quad . \tag{1.69}$$

Akční proměnné

Hamilton-Jacobiho rovnice umožňuje zavést proměnné $Q_0, P_0 = E$ tak, že Q_0 se mění lineárně s časem. Často se však zavádí tzv. *akční proměnné* Q, P tak, že P je opět konstantní a je nějakou funkcí energie $P(E)$. Q je opět lineární funkcí času a sice takovou, aby Q vzrostlo o 2π právě za periodu T určenou (1.67). Protože po době T se soustava nachází v původním stavu, je potom Q (které se zvětší o 2π) úhlová proměnná, která se pro každou periodickou trajektorii mění rovnoměrně s periodou rovnou periodě odpovídající trajektorie.

Položme

$$P(E) = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2\big(E - U(q)\big)}\, \mathrm{d}q \quad , \tag{1.70}$$

tedy nový zobecněný impuls je roven ploše uzavřené periodickou fázovou trajektorií dělené 2π. Pak i energii je naopak možno vyjádřit jako funkci P:

$$E = E(P) \quad .$$

Vezměme vytvořující funkci kanonické transformace $q, p \to Q, P$

$$\tilde{F}_0(q, P) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{2\big(E(P) - U(q)\big)}\, \mathrm{d}q \quad . \tag{1.71}$$

Potom nová souřadnice je

$$Q = \frac{\partial \tilde{F}_0(q, P)}{\partial P} = \int_{q_0}^{q} \frac{\frac{\partial E}{\partial P}}{\sqrt{2\big(E(P) - U(q)\big)}}\, \mathrm{d}q \quad . \tag{1.72}$$

Podle (1.70) a (1.67) je však

$$\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{1}{\pi} \int_{q_1}^{q_2} \frac{1}{\sqrt{2\big(E - U(q)\big)}}\, \mathrm{d}q = \frac{T}{2\pi} \quad . \tag{1.73}$$

Tedy

$$Q = \frac{2\pi}{T} Q_0 \tag{1.74}$$

a časová závislost

$$Q(t) = Q(0) + \frac{2\pi}{T}(t - t_0) \quad . \tag{1.75}$$

Využili jsme toho, že $\dot{Q}_0 = 1$. Výsledek (1.75) ostatně plyne i přímo z kanonické rovnice

$$\dot{Q}(t) = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\partial E(P)}{\partial P} = \frac{2\pi}{T} \quad .$$

Akční proměnné Q, P se uplatňují zvláště v teorii rotačně orbitálního pohybu nepravidelných těles.

11. Poznamenejme ještě, že doba pohybu po separatrixe do stacionárního bodu musí být nekonečná. To plyne z věty o jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Jinak by totiž stacionárním bodem procházela ve fázovém prostoru dvě řešení.

Kapitola 2

Problém dvou těles

2.1 Pohyb částice v poli centrální síly

Mějme dva hmotné body o hmotnostech m_1, m_2 a polohových vektorech $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$. Potenciální energie U systému nechť závisí pouze na velikosti relativního polohového vektoru

$$\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \quad . \tag{2.1}$$

Lagrangián tohoto systému bude záviset na šesti zobecněných souřadnicích (3 složky $\vec{R}_1$ a 3 složky $\vec{R}_2$) a jejich zobecněných rychlostech

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{R}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{R}}_2^{\,2} - U(r) \quad , \tag{2.2}$$

kde $r = |\vec{r}\,|$. Zavedeme-li vektor těžiště soustavy

$$\vec{R} = \frac{1}{m}[m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2] \quad , \tag{2.3}$$

kde

$$m = m_1 + m_2 \quad , \tag{2.4}$$

můžeme Lagrangián vyjádřit v jiné šestici proměnných, totiž ve složkách vektorů $\vec{r}$ a $\vec{R}$. Protože

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \vec{R} - \frac{m_2}{m}\vec{r} \quad , \\ \vec{R}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m}\vec{r} \quad , \end{aligned} \tag{2.5}$$

dostaneme dosazením do (2.2) po krátké úpravě

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r) \quad , \tag{2.6}$$

kde redukovaná hmotnost

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad . \tag{2.7}$$

Označíme-li složky vektoru $\vec{R} - [X,Y,Z]$ a složky vektoru $\vec{r} - [x,y,z]$ pak hned vidíme, že X,Y,Z jsou cyklické souřadnice (Lagrangián závisí jen na $\dot{X},\dot{Y},\dot{Z}$,ne však na X,Y,Z) . Z Lagrangeových rovnic (1.2) vidíme, že $\dot{X},\dot{Y},\dot{Z}$ jsou konstanty

$$\dot{X} = a_x \quad ,\dot{Y} = a_y \quad ,\dot{Z} = a_z \quad . \tag{2.8}$$

Tedy těžiště systému se pohybuje rovnoměrně přímočaře

$$X = a_x t + b_x \quad , \quad Y = a_y t + b_y \quad , \quad Z = a_z t + b_z \quad , \tag{2.9}$$

což je zákon zachovaní těžiště. Pohyb vektoru $\vec{R}$ je tak vyřešen a zbývající tři stupně volnosti odpovídají vektoru $\vec{r}$. Zvolíme-li počátek souřadné soustavy, ve které složky vektorů vyjadřujeme, přímo v těžišti, pak $a_x = a_y = a_z = b_x = b_y = b_z = 0$ a $X = Y = Z = 0$ stále. Lagrangián pro určení časové závislosti $\vec{r}$ je potom

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \quad . \tag{2.10}$$

Relativní vektor $\vec{r}$ v systému dvou těles se tedy mění přesně tak, jako by se měnil polohový vektor $\vec{r}$ bodu o hmotnosti μ v poli centrální síly $U(r)$.

2.2 Zákon zachování momentu hybnosti

Lagrangeovy rovnice pro lagrangián (2.10) dávají

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \quad , \tag{2.11}$$

neboť

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

Odtud plyne:

Teorém. Těleso se pohybuje v poli centrální síly s konstantním momentem hybnosti

$$\vec{M} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} \quad .$$

Důkaz:
Dostaneme okamžitě derivací $\vec{M}$ podle času

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}} \times \mu\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \mu\ddot{\vec{r}} = 0 \quad . \tag{2.12}$$

V obou vektorových součinech ve (2.12) máme díky (2.11) vektory stejného směru.

Snadno se přesvědčíme, že definujeme-li momenty hybnosti jednotlivých bodů v problému dvou těles, dostaneme jejich sečtením opravdu moment $\vec{M}$. Využijeme přitom (2.5) a faktu, že $\dot{\vec{R}} = 0$, $\vec{R} = 0$

$$\begin{aligned} m_1\vec{R}_1 \times \dot{\vec{R}}_1 + m_2\vec{R}_2 \times \dot{\vec{R}}_2 &= m_1\frac{m_2}{m}\vec{r} \times \frac{m_2}{m}\dot{\vec{r}} + m_2\frac{m_1}{m}\vec{r} \times \frac{m_1}{m}\dot{\vec{r}} = \\ = \frac{m_1 m_2}{m^2}(m_1+m_2)(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) &= \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{M} \quad . \end{aligned}$$

Zákon zachování momentu hybnosti především ukazuje, že pohyb v poli centrální síly probíhá v rovině. Vektor $\vec{r}$ je stále kolmý na konstantní vektor $\vec{M}$. Zvolme osu z ve směru vektoru $\vec{M}$ a zaveďme polární souřadnice v rovině oběhu. Tedy

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (x,y) \\ \dot{\vec{r}} &= (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, r\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) = (\dot{x},\dot{y}) \quad . \end{aligned}$$

Odtud snadno určíme, že třetí složka vektoru $\vec{M}$, která je při této volbě os rovna velikosti vektoru $\vec{M}$ (tj. $M_z = M$) je

$$M = M_3 = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r^2\dot{\varphi} \quad . \tag{2.13}$$

Lagrangián (2.10) bude mít v polárních souřadnicích tvar

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \quad . \tag{2.14}$$

Vidíme, že φ je cyklická a odpovídající Lagrangeova rovnice (1.2) je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu r^2\dot{\varphi}) = 0 \quad , \tag{2.15}$$

čemuž opět odpovídá zákon zachování momentu hybnosti

$$\mu r^2\dot{\varphi} = M = \text{konst.} \tag{2.16}$$

Lagrangeova rovnice pro r dává

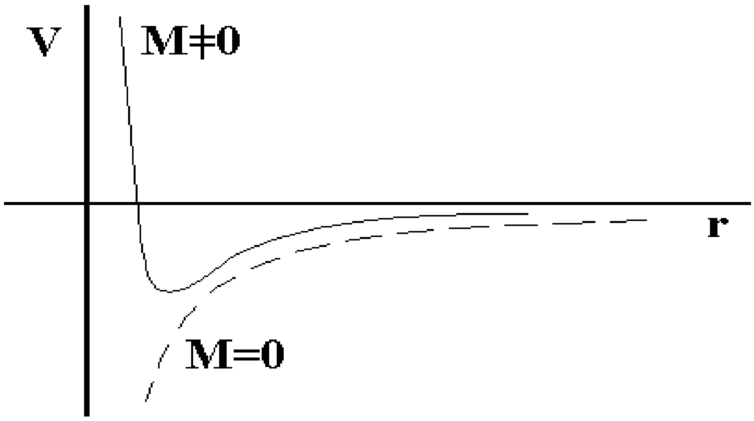
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial U}{\partial r} \quad . \tag{2.17}$$

Uvážíme-li, že plocha opsaná průvodičem (vektorem $\vec{r}$) v oběžné rovině závisí na pootočení $\mathrm{d}\varphi$ vztahem

$$\mathrm{d}P = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\varphi \quad ,$$

pak změna plochy opsané průvodičem za jednotku času (neboli *plošná rychlost*) je Plošná rychlost

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \quad . \tag{2.18}$$



Obrázek 2.1: Jednorozměrný efektivní potenciál $V(r)=\frac{1}{2}\frac{M^2}{\mu r^2}-G\frac{m_1m_2}{r}$

2. Keplerův zákon

Těleso se v centrálním poli pohybuje tak, že plošná rychlost průvodiče je konstantní. Tento zákon vyslovený pro pohyb planety v gravitačním poli Slunce nazýváme *2. Keplerův zákon*, někdy též zákon ploch. Zdůrazněme, že zákon ploch platí pro libovolné centrální pole a nikoli jen pro potenciální energii

$$U(r)=-G\frac{\mu m}{r}=-G\frac{m_1m_2}{r}\quad , \tag{2.19}$$

která popisuje gravitační působení dvou hmotných bodů o hmotnostech μ, m. Konstanta G v (2.19) je gravitační konstanta. Na rozdíl od 2. Keplerova zákona platí 1. a 3. Keplerův zákon jen za předpokladu (2.19).

2.3 Pohyb v centrálním poli

Zavedeme-li postupem definovaným v 1.kapitole zobecněné impulsy p_φ, p_r k souřadnicím φ, r, dostaneme z (2.14)

$$p_r=\mu\dot{r}\quad ,\quad p_\varphi=\mu r^2\dot{\varphi}=M \tag{2.20}$$

$$H=\frac{1}{2}\frac{p_r^2}{\mu}+\frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{\mu r^2}+U(r)\quad . \tag{2.21}$$

Protože H nezávisí explicitně na čase, máme další integrál $H=E$. V Hamiltonově rovnici pro r se nebude vyskytovat φ, a protože $p_\varphi=M=$konst., vidíme srovnáním (2.21) s (1.60), že pohyb v r probíhá stejně, jako kdyby se částice hmotnosti μ pohybovala v jednorozměrném efektivním potenciálu (viz obr.2.1)

$$U_{\mathrm{ef}}(r)=U(r)+\frac{1}{2}\frac{M^2}{\mu r^2}\quad . \tag{2.22}$$

Z integrálu $H = E$ můžeme vyjádřit p_r

$$p_r = \mu\dot{r} = \pm\left[2\mu(E - U_{\mathrm{ef}})\right]^{\frac{1}{2}} \quad , \tag{2.23}$$

neboli pro $p_r > 0$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\left[2\mu\big(E - U_{\ \mathrm{ef}}(r)\big)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad . \tag{2.24}$$

Jde opět o základní rovnici pro řešení jednorozměrných úloh (1.66). Rozdíl je jen v tom, že nebyla provedena transformace (1.61), odtud faktor μ u energie. Pro konkrétní tvar $U(r)$ je pak možno provést rozbor podobně jako v kapitole 1.6, tj. nalézt případné body obratu, periodu mezi nimi atd. Rovnice trajektorie v konfiguračním prostoru $r(\varphi)$ plyne ze vztahu

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\dot{\varphi}} = \frac{\mu r^2}{M}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Užitím (2.24) tedy

$$\varphi - \varphi_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{M}{r^2}\left[2\mu\big(E - U(r)\big) - \frac{M^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r \quad . \tag{2.25}$$

2.4 Binetův vzorec

Jiný způsob určení tvaru dráhy $r(\varphi)$ umožňuje Binetův vzorec. Dostaneme jej tak, že do rovnice (2.17) zavedeme místo času novou nezávislou proměnnou φ a místo závislé proměnné r zavedeme novou závislou proměnnou $u = 1/r$. Derivování podle času nahrazujeme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{M}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{M}{\mu}u^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \quad .$$

Proto místo $\ddot{r}$ budeme mít

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u}\right) = \frac{M}{\mu}u^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left[\frac{M}{\mu}u^2\left(-\frac{1}{u^2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right] = -\frac{M^2}{\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} \quad ,$$

$\mu r\dot{\varphi}^2$ nahradíme opět ze zákona zachování hybnosti

$$\mu r\dot{\varphi}^2 = \frac{M^2}{\mu r^3} = \frac{M^2}{\mu}u^3 \quad .$$

Zavedeme-li dále pro funkci $\left(\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right)$ vyjádřenou pomocí u označení $F(u)$, dostaneme ze (2.17) Binetův vzorec ve tvaru

Binetův vzorec

$$\frac{M^2}{\mu}u^2(u^{''} + u) = -F(u) \quad , \tag{2.26}$$

kde čárkou označujeme derivaci podle φ.

Vyjádřeme ještě kinetickou energii T pomocí u a $u^{'}$

$$T = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}\mu\left[\frac{M^2}{\mu^2}u^4\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{1}{u}\right)^2 + \frac{M^2}{\mu^2}u^2\right] = \frac{M^2}{2\mu}\left[(u^{'})^2 + u^2\right] \ . \tag{2.27}$$

2.5 Keplerova úloha

Keplerovou úlohou nazýváme problém dvou těles s potenciální energií (2.19). Pro určení tvaru dráhy pomocí Binetova vzorce nejprve určíme funkci $F(u)$

$$F(u) = -\frac{\partial U}{\partial r} = G\frac{\mu m}{r^2} = G\mu\, m\, u^2 \quad .$$

Z Binetova vzorce potom plyne

$$u^{''} + u \ = G\frac{\mu^2 m}{M^2} \quad , \tag{2.28}$$

což je lineární diferenciální rovnice 2.řádu. Obecné řešení je součtem obecného řešení rovnice homogenní (tj. bez pravé strany) a partikulárního řešení rovnice s pravou stranou

$$u \ = G\frac{\mu^2 m}{M^2}\big(1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)\big) \quad . \tag{2.29}$$

Zde e, φ_0 jsou dvě libovolné integrační konstanty. Budeme však předpokládat $e \geq 0$. Pokud by totiž bylo $e < 0$, můžeme vždy φ_0 zvětšit o π a dosáhnout toho, že $e \geq 0$. Rovnice (2.29) dává pro r závislost

$$r = \frac{\frac{M^2}{G\mu^2 m}}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)} \quad . \tag{2.30}$$

Z analytické geometrie je známo, že rovnice

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{2.31}$$

je rovnicí kuželosečky.

- Pro $e < 1$ jde o **elipsu**, jejíž velká poloosa a souvisí s p vztahem

  $$p = a(1 - e^2) \quad , \quad b = a\sqrt{1 - e^2} \quad , \tag{2.32}$$

  kde e je excentricita elipsy a b je malá poloosa. Ohnisko elipsy leží v počátku souřadnic a střed elipsy je od počátku vzdálen o $ae = \varepsilon$.

- Pro $e = 1$ je (2.31) rovnicí paraboly.

- Pro $e > 1$ je (2.31) rovnicí větve hyperboly. Tentokrát platí

$$p = a(e^2 - 1) \quad , \quad b = a\sqrt{e^2 - 1} \quad . \tag{2.33}$$

Docházíme k *1. Keplerovu zákonu*: Koncový bod $\vec{r}$ v Keplerově úloze opisuje kuželosečku s ohniskem v počátku. 1. Keplerův zákon

Z rovnic (2.27) a (2.30) dostaneme pro energii

$$E = \frac{M^2}{2\mu}\frac{G^2\mu^4m^2}{M^4}\left[e^2\sin^2(\varphi - \varphi_0) + 1 + 2e\cos(\varphi - \varphi_0) + e^2\cos^2(\varphi - \varphi_0)\right] -$$

$$-G\mu m\frac{G\mu^2 m}{M^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)\right] \quad \text{, tedy}$$

$$E = \frac{G^2\mu^3m^2}{2M^2}(e^2 - 1) \quad . \tag{2.34}$$

Vidíme, že při eliptické dráze je $E < 0$, při parabolické je $E = 0$, při hyperbolické je $E > 0$.

Odvoďme nyní vztah mezi a, e na jedné straně a M,E na straně druhé. Tento vztah je důležitý, protože umožňuje např. z počátečních rychlostí a souřadnic určit a, e prostřednictvím M, E.

1. Je-li $E < 0$, je dráha elipsa a z (2.30), (2.32) a (2.34) máme

$$\frac{M^2}{G\mu^2 m} = a(1 - e^2) \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} = \frac{G\mu^2 m}{M^2}(1 - e^2) = -\frac{2}{G\,\mu\,m}E \quad \text{a tedy}$$

$$E = -\frac{G\,\mu\,m}{2a} \quad , \quad a = -\frac{G\,\mu\,m}{2E} \quad . \tag{2.35}$$

   Z energie určíme nejen charakter pohybu, ale i velkou poloosu. Z (2.30) a (2.32) vyjádříme moment hybnosti jako funkci e, a

$$M^2 = G\mu^2 ma(1 - e^2) \quad \text{, tedy}$$

$$M = \mu\sqrt{G\,m\,a\,(1 - e^2)} \quad . \tag{2.36}$$

   Naopak excentricita vyjádřená pomocí M a E je

$$e^2 = 1 + \frac{2EM^2}{G^2\mu^3m^2} \quad . \tag{2.37}$$

2. Pro parabolickou dráhu je $E = 0$ a $e = 1$, parametr p je ($2p$ je šířka paraboly měřená v ohnisku kolmo na osu)

$$p = \frac{M^2}{G\mu^2 m} \quad . \tag{2.38}$$

3. Pro hyperbolu je $E > 0$ a (2.33) spolu s (2.30) a (2.34) dává

$$\frac{M^2}{G\mu^2 m} = a(e^2-1) \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} = \frac{G\mu^2 m}{M^2}(1-e^2) = \frac{G\,\mu\,m}{2E}$$

tedy

$$E = \frac{G\,\mu\,m}{2a} \quad , \quad a = \frac{G\,\mu\,m}{2E} \tag{2.39}$$

z (2.34)

$$M = \mu\sqrt{G\,m\,a\,(e^2-1)} \tag{2.40}$$

a pro excentricitu pomocí M, E máme opět (2.37).

Odvoďme ještě 3. Keplerův záklon dávající do vztahu oběžnou dobu T a velkou poloosu a pro eliptickou dráhu. Protože plocha elipsy je πab, musí platit

$$T\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} \quad . \tag{2.41}$$

Podle (2.18) souvisí plošná rychlost s M určeným (2.16)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\mu}M \quad .$$

Dosadíme ze (2.36) za M a (2.41) dává

$$\frac{T}{2}\sqrt{G\,m\,a\,(1-e^2)} = \pi a^2\sqrt{1-e^2} \quad .$$

3. Keplerův zákon

odkud

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm}{4\pi^2} \quad , \tag{2.42}$$

což je *3. Keplerův zákon*. Někdy zavádíme střední pohyb n vztahem

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad . \tag{2.43}$$

Tedy střední pohyb je úhlová rychlost, se kterou by se musel pohybovat bod po kružnici, aby jeho perioda byla rovna T. Pak je možno 3.Keplerův zákon přepsat do tvaru

$$n^2 a^3 = Gm = k \quad . \tag{2.44}$$

2.6 Keplerova rovnice

Pro určení časové závislosti polohy bodu na eliptické dráze je možno využít (2.24), odkud integrací pro Keplerovu úlohu dostaneme v každém intervalu monotonní změny r

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\left[\frac{2}{\mu}\left(E + G\frac{m\,\mu}{r}\right) - \frac{M^2}{\mu^2 r^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad . \tag{2.45}$$

1. **Eliptický pohyb**
Zavedeme-li do jmenovatele (2.45) místo integračních konstant E, M konstanty a, e pomocí (2.35) a (2.36), dostaneme

$$t - t_0 = \left(\frac{a}{Gm}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{r \, \mathrm{d}r}{[-(r-a)^2 + a^2e^2]^{\frac{1}{2}}} \quad . \tag{2.46}$$

Integrál typu (2.46) je možno řešit substitucí nové proměnné u vztahem

$$\begin{aligned} r - a &= -ae\cos u \quad , \\ \mathrm{d}r &= +ae\sin u \;\mathrm{d}u \quad . \end{aligned} \tag{2.47}$$

Zvolíme počátek odečítání času $t_0 = 0$ v okamžiku, kdy $u_0 = 0$, což odpovídá $r_0 = a - ae$, tedy v okamžiku, kdy je bod v nejbližším vrcholu elipsy k ohnisku. Tomuto bodu říkáme *pericentrum*. V oblasti $0 \leq u \leq \pi$ a tedy i rostoucího r dostáváme

Pericentrum

$$t - t_0 = \left(\frac{a^3}{Gm}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{0}^{u} (1 - e\cos u)\,\mathrm{d}u \quad . \tag{2.48}$$

Integrací (2.48) a zavedením n z (2.44) dostaneme

Keplerova rovnice

$$nt = u - e\sin u \quad . \tag{2.49}$$

Tuto rovnici nazýváme *Keplerovou rovnicí*. Snadno vidíme, že platí v celém oboru u tj. i když $\sin u$ je záporný a r tedy klesá. Jde o transcendentní rovnici. Řešení Keplerovy rovnice spočívá v nalezení $u(t)$. Toto řešení, jak uvidíme později, se provádí většinou numericky (např. iterační metodou) nebo pomocí řad. Jestliže k danému t určíme řešení u Keplerovy rovnice, můžeme určit r z (2.47). Veličina

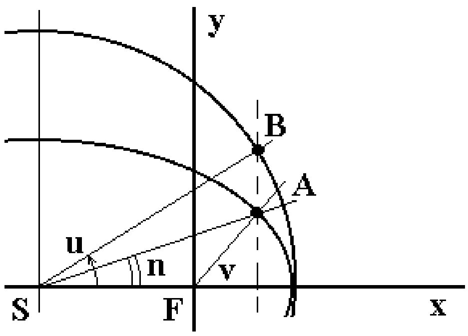
Střední anomálie

$$l = nt \tag{2.50}$$

se nazývá *střední anomálie*. Jak plyne z významu n (2.44), je l úhel opsaný průvodičem při rovnoměrném kruhovém pohybu o téže periodě jako je perioda pohybu eliptického. Veličina u se nazývá excentrickou anomálií. Konečně úhel skutečného průvodiče bodu na orbitě s průvodičem k pericentru elipsy označme $v = \varphi - \varphi_0$ (připomeňme, že t_0 byl zvolen jako okamžik průchodu pericentrem) a nazýváme ho *pravou anomálií*.

Excentrická a pravá anomálie

Zavedeme soustavu sořadnic x, y s počátkem v ohnisku F elipsy, osu x volíme ve směru k pericentru, osu y tak, aby pohyb od pericentra začínal v prvním kvadrantu soustavy. Označíme-li okamžitou polohu koncového bodu vektoru A a střed elipsy S (obr.2.2), potom excentrickou anomálii u je též možno zavést jako orientovaný úhel $u = \angle FSB$, kde bod B jsme dostali jako průsečík kolmice na osu x vedené bodem A s kružnicí



Obrázek 2.2:

o poloměru a a středem S. Takto zavedené u skutečně splňuje první z rovnic (2.47), neboť jak plyne z (obr.2.2)

$$\cos u \;=\frac{ae+r\cos v}{a} \quad , \tag{2.51}$$

a protože

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \;\Rightarrow\; \cos v \;=\frac{a}{er}(1-e^2)-\frac{1}{e} \quad , \tag{2.52}$$

dosazením za $\cos v$ z (2.52) do (2.51) dostaneme

$$\cos u \;=\frac{a-r}{ae} \quad , \tag{2.53}$$

což je právě (2.47).

Vztah mezi pravou a excentrickou anomálií plyne ze srovnání souřadnic x, y bodu A vyjádřených pomocí těchto anomálií.

$$\begin{aligned} x &= r\cos v \;= a(\cos u \;-e) \quad , \\ y &= r\sin v \;= a\sqrt{1-e^2}\sin u \quad . \end{aligned} \tag{2.54}$$

Uvážením (2.53) ve tvaru

$$r=a(1-e\cos u\;) \quad , \tag{2.55}$$

dostaneme

$$\cos v \;=\frac{\cos u \;-e}{1-e\cos u} \quad , \quad \sin v \;=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u} \tag{2.56}$$

nebo naopak

$$\cos u \;=\frac{e+\cos v}{1+e\cos v} \quad , \quad \sin u \;=\sqrt{1-e^2}\frac{\sin v}{1+e\cos v} \quad . \tag{2.57}$$

Většinou se však pro vztahy mezi anomáliemi používá tangenty polovičního úhlu. Užitím (2.56) dostaneme

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}^2\,\frac{v}{2} &= \frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}} = \frac{1-\cos v}{1+\cos v} = \frac{1-e\cos u\ -(\cos u\ -e)}{1+\cos u\ +\cos u\ -e} = \\ &= \frac{(1-\cos u)(1+e)}{(1+\cos u)(1-e)} = \frac{1+e}{1-e}\,\mathrm{tg}^2\,\frac{u}{2} \quad .\end{aligned}$$

Odtud

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2} \quad , \tag{2.58}$$

přitom $\frac{v}{2}$ a $\frac{u}{2}$ jsou stále ve stejném kvadrantu.

Pro určení okamžité polohy bodu na eliptické dráze, určíme nejprve pro daný čas t odpovídající střední anomálii l, řešením Keplerovy rovnice určíme excentrickou anomálii u a konečně ze (2.58) můžeme určit pravou anomálii v. Souřadnice x a y můžeme určit z (2.54).

2. **Obdoba Keplerovy rovnice pro parabolickou dráhu**
Vyjdeme opět z rovnice (2.45), kam dosadíme $E = 0$ a zavedeme p z (2.38).

$$t - t_0 = (Gm)^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{p}{2}}^{r} \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{2r-p}} \quad . \tag{2.59}$$

Integrály tohoto typu řešíme substitucí nové proměnné σ

$$\begin{aligned}\sqrt{p}\sigma &= \sqrt{2r-p} \quad , \\ \mathrm{d}r &= p\sigma\,\mathrm{d}\sigma \quad .\end{aligned} \tag{2.60}$$

Tím převedeme (2.59) na

$$t - t_0 = \left[2\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^3}{Gm}\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sigma} (1+\sigma^2)\,\mathrm{d}\sigma \quad . \tag{2.61}$$

Po integraci dostaneme obdobu Keplerovy rovnice pro parabolický pohyb

$$\sigma + \frac{1}{3}\sigma^3 = \left[\frac{Gm}{2\left(\frac{p}{2}\right)^3}\right]^{\frac{1}{2}} (t - t_0) \quad . \tag{2.62}$$

Vztah mezi σ a v, tj. obdobu (2.58) pro parabolický případ dostaneme srovnáním r z (2.60) a (2.31) s $e = 1$.

$$\frac{p}{1+\cos v} = \frac{1}{2}p(1+\sigma^2) \ \Rightarrow\ \sigma^2 = \frac{2}{1+\cos v} - 1 = \frac{1-\cos v}{1+\cos v} = \mathrm{tg}^2\,\frac{v}{2} \quad .$$

Tedy

$$\sigma = \mathrm{tg}\,\frac{v}{2} \quad . \tag{2.63}$$

Opět je třeba nejprve řešit transcendentní rovnici (2.62) a potom určit v z (2.63).

3. **Obdoba Keplerovy rovnice pro hyperbolickou dráhu**
Zavedeme-li do (2.45) s kladným $E > 0$ veličiny a, e z (2.39) a (2.40), dostaneme integrál

$$t - t_0 = \left(\frac{a}{Gm}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_a^r \frac{r\,\mathrm{d}r}{[(r+a)^2 - a^2e^2]^{\frac{1}{2}}} \quad . \tag{2.64}$$

Tento integrál řešíme substitucí veličiny f místo r

$$\begin{aligned} r + a &= ae\cosh f \quad , \\ \mathrm{d}r &= ae\sinh f\,\mathrm{d}f \quad . \end{aligned} \tag{2.65}$$

Pak

$$t - t_0 = \left(\frac{a^3}{Gm}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^f (e\cosh f - 1)\,\mathrm{d}f \quad .$$

Obdoba Keplerovy rovnice pro hyperbolický pohyb tedy zní

$$e\sinh f - f = \left(\frac{Gm}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}} (t - t_0) \quad . \tag{2.66}$$

Srovnáme-li výraz pro r pomocí pravé anomálie a (2.65), dostaneme

$$\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos v} = a(e\cosh f - 1) \quad ,$$

odkud

$$\cosh f = \frac{e + \cos v}{1 + e\cos v} \quad . \tag{2.67}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{tgh}^2\,\frac{f}{2} &= \frac{\sinh^2\frac{f}{2}}{\cosh^2\frac{f}{2}} = \frac{e^f - 2 + e^{-f}}{e^f + 2 + e^{-f}} = \frac{\cosh f - 1}{\cosh f + 1} = \\ &= \frac{e + \cos v \; - 1 - e\cos v}{e + \cos v \; + 1 + e\cos v} = \frac{(e-1)(1-\cos v)}{(e+1)(1+\cos v)} \\ &= \frac{e-1}{e+1}\,\mathrm{tg}^2\,\frac{v}{2} \quad , \end{aligned}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{tgh}\,\frac{f}{2} \quad . \tag{2.68}$$

To je obdoba vztahu (2.58) pro hyperbolický pohyb. Postup určení polohy bodu na hyperbole pro zadaný čas t je opět obdobný jako v předešlých případech a musí mu předcházet řešení transcendentní rovnice (2.66).

2.7 Elementy dráhy

Po volbě počátku souřadné soustavy v těžišti T představuje (2.10) Lagrangián systému se 3 stupni volnosti. Nechť X, Y, Z jsou osy inerciální soustavy s počátkem T. Takovou soustavu budeme značit $[T, X, Y, Z]$. Souřadnice vektoru $\vec{r}$ můžeme označit X, Y, Z bez nebezpečí záměny se souřadnicemi těžiště (2.9), protože souřadnice těžiště jsou nyní stále 0 a v dalších rovnicích nebudou vystupovat. Souřadná soustava $[T, x, y, z]$ zavedená v kapitole 2.2 byla zvolena tak, aby oběžná rovina splývala s rovinou (x, y). Zatímco $M_x = M_y = 0$ a $M_z = M$, složky M_X, M_Y, M_Z jsou obecně všechny nenulové.

Lagrangeovy rovnice (3 rovnice druhého řádu) mají řešení obsahující 6 integračních konstant. Jsou to např. energie E, tři složky vektoru momentu hybnosti $\vec{M} = (M_X, M_Y, M_Z)$, úhel φ_0 pericentra od zvolené osy v oběžné rovině (v kapitole 2.6 jsme osu x volili ve směru k pericentru, tedy $\varphi_0 = 0$) a okamžik průchodu pericentrem t_0. Zatímco E a velikost M určují tvar dráhy (tj. e, a u elipsy a hyperboly pro $E \neq 0$ a p pro parabolu při $E = 0$), určuje směr vektoru $\vec{M}$ polohu oběžné roviny. Místo těchto šesti konstant se často zavádí jiná šestice integračních konstant $I, \Omega, \omega, a, e, t_0$. Tyto konstanty se potom nazývají *elementy dráhy*. První element I je *sklon dráhy*. Je to úhel roviny (x, y) s rovinou (X, Y). Přesněji jej definujeme jako úhel vektoru $\vec{M}$ s kladným směrem osy Z. Elementy dráhy

$$\cos I = \frac{M_Z}{M} \quad . \tag{2.69}$$

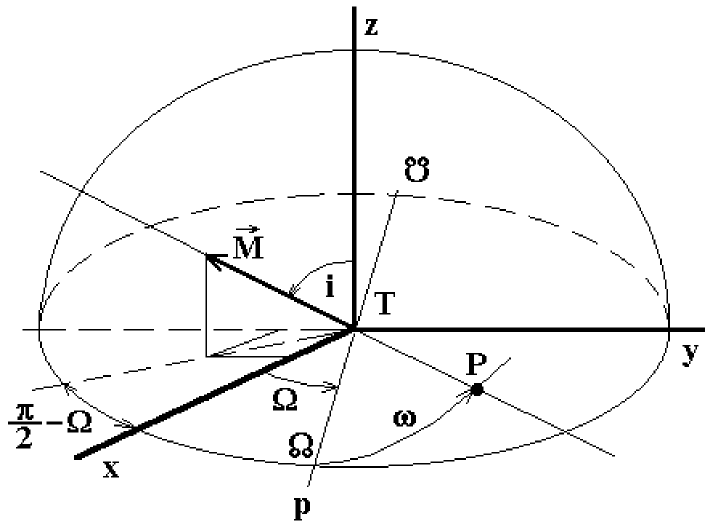
Tento úhel je tedy v intervalu $I \in < 0, \pi >$. Druhý element Ω se nazývá *délka výstupného uzlu*. Uzlovou přímkou p nazýváme průsečnici roviny (x, y) a (X, Y). Přímka p protíná kouli k o jednotkovém poloměru se středem v T ve dvou bodech $\mathbf{\Omega}, \mho$. Tyto body nazýváme *uzly dráhy*. Bod $\mathbf{\Omega}$, ve kterém souřadnice Z roste, se nazývá *výstupný uzel* (bod $\mho$ je potom *uzel sestupný*). Délka výstupného uzlu je úhel kladné osy X s polopřímkou $T\mathbf{\Omega}$ (obr.2.3). Z obr.2.3 vidíme, že platí Uzly dráhy

$$\begin{aligned} M_X &= M \sin\Omega \sin I \quad , \\ M_Y &= -M \cos\Omega \sin I \quad . \end{aligned} \tag{2.70}$$

Třetí element dráhy je *argument pericentra* ω. Je-li průsečík polopřímky vedoucí od T k pericentru (bodu, kde $\varphi = \varphi_0$) s jednotkovou koulí k, potom $\omega = \angle\mathbf{\Omega}TP$. Druhá trojice elementů dráhy jsou známé veličiny a, e, t_0 pro eliptickou a hyperbolickou dráhu. Pro parabolickou dráhu víme předem, že $e = 1$ a místo a (které tu není definováno) se zavádí p z (2.31).

První trojice elementů dráhy určuje polohu dráhy v inerciálním systému $[T, X, Y, Z]$ a při otočení souřadné soustavy se všechny tři elementy mění. Elementy e, a (resp. p) určují tvar dráhy, a konečně t_0 určuje okamžik průchodu pericentrem. Tato druhá trojice elementů nezávisí na volbě soustavy $[T, X, Y, Z]$.

Známe-li počáteční vektor $\vec{r}$ a $\dot{\vec{r}}$ v nějakém čase t_1, potom můžeme ihned určit $E, \vec{M}$, tedy i a, e (resp. p pro $E = 0$), Ω, I. Jak nejlépe určíme ω? K tomu je výhodné definovat tzv. *Laplaceův vektor* Laplaceův vektor



Obrázek 2.3: Elementy dráhy

$$\vec{K} = \dot{\vec{r}} \times \vec{M} - G\frac{\mu\, m}{r}\vec{r} \quad . \tag{2.71}$$

Tento vektor je opět integrálem pohybu, jak se přesvědčíme jeho derivací podle času

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{M} + G\frac{\mu\, m\dot{r}}{r^2}\vec{r} - G\frac{\mu\, m}{r}\dot{\vec{r}} \quad . \tag{2.72}$$

Uvážíme-li pohybovou rovnici pro $L = 1/2\,\mu\dot{\vec{r}}^2 + G\mu\, m/r$ ve tvaru

$$\ddot{\vec{r}} = -G\frac{m}{r^3}\vec{r} \quad ,$$

vidíme, že první člen napravo v (2.72) je

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{M} = -G\frac{\mu\, m}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = -G\frac{\mu\, m}{r^3}\left[\vec{r}(\vec{r}.\dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r}.\vec{r})\right] \quad .$$

Protože

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{r}(X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\,\dot{Z}) = \frac{1}{r}\vec{r}.\dot{\vec{r}} \quad ,$$

vidíme, že se členy na pravé straně (2.72) vyruší. Tedy $\vec{K}$ je konstantní vektor. Velikost a směr vektoru $\vec{K}$ určíme nejsnáze v pericentru. Polohový vektor $\vec{r}_p$ pro pericentrum má velikost

$$\begin{aligned} r_p &= a(1-e) && \text{pro elipsu,} \\ r_p &= a(e-1) && \text{pro hyperbolu,} \\ r_p &= \tfrac{p}{2} && \text{pro parabolu.} \end{aligned}$$

V pericentru má dále $\dot{\vec{r}} \times \vec{M}$ stejný směr jako $\vec{r}_p$.

$$\begin{aligned}\vec{K} &= \left|\dot{\vec{r}} \times \vec{M}\right| \frac{\vec{r}_p}{r_p} - G\mu\, m\frac{\vec{r}_p}{r_p} = \left[|r_p\dot{\varphi}M| - G\mu\, m\right] \frac{\vec{r}_p}{r_p} = \\ &= \left(r_p\frac{M^2}{\mu r_p^2} - G\mu\, m\right)\frac{\vec{r}_p}{r_p} \quad .\end{aligned}$$

Snadno vidíme, že pro všechny tři typy drah platí díky (2.36), (2.38) či (2.40)

$$\frac{M^2}{\mu r_p} = G\mu\, m(1+e) \quad .$$

Tedy

$$\vec{K} = G\mu\, m\, e\frac{\vec{r}_p}{r_p} \quad . \tag{2.73}$$

Laplaceův vektor (2.71) směřuje od ohniska do pericentra a má velikost $G\mu\, m\, e$. Rovnice (2.71) tedy umožňuje určit z počátečních hodnot $\vec{r}(t_1)$ a $\dot{\vec{r}}(t_1)$ polohu pericentra.

Zbývá určit poslední element dráhy t_0. Ze známé polohy bodu na dráze v čase t_1 můžeme určit u z rovnice (2.47), jde-li o elipsu ($E < 0$), nebo σ z (2.60), jde-li o parabolu ($E = 0$), nebo f z (2.65), jde-li o hyperbolu ($E > 0$). Z Keplerovy rovnice, resp. její obdoby pro ostatní typy drah, určíme snadno střední anomálii, resp. dobu t, která uplynula od průchodu pericentrem, tedy i $t_0 = t_1 - t$. Tak je možno z počátečních souřadnic a rychlostí určit všech šest elementů dráhy.

2.8 Určení souřadnic bodu na oběžné dráze

Při známých elementech $I, \Omega, \omega, a, e, t_0$ můžeme snadno určit souřadnice X, Y, Z koncového bodu vektoru $\vec{r}$. V eliptickém případě určíme nejprve řešením Keplerovy rovnice excentrickou anomálii a z rovnic (2.54) souřadnice x, y. Souřadná soustava $S^{'} \equiv [T, x, y, z]$ vznikne z $S \equiv [T, X, Y, Z]$ po třech otočeních. Nejprve je třeba S otočit o úhel Ω okolo osy Z, potom o úhel I okolo nové osy $X^{'}$ (spývá s uzlovou přímkou) a konečně musíme provést otočení o úhel ω okolo nové osy $Z^{''}$ (splývá se směrem osy z). Vyšetřeme nejprve obecně chování složek vektorů při těchto otočeních.

Jestliže pravoúhlá souřadnicová soustava $S^{'} \equiv [0, \xi^{'}, \eta^{'}, \zeta^{'}]$ vznikne ze souřadnicové soustavy $S \equiv [0, \xi, \eta, \zeta]$ otočením okolo osy ζ o úhel α, potom sloupcový vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad \text{souvisí se sloupcovým vektorem} \quad \vec{x}^{'} = \begin{pmatrix} \xi^{'} \\ \eta^{'} \\ \zeta^{'} \end{pmatrix}$$

vztahem

$$\vec{x} = \mathcal{R}_3(\alpha)\vec{x}^{'} \quad \text{, resp.} \quad \vec{x}^{'} = \mathcal{R}_3(-\alpha)\vec{x} \quad , \tag{2.74}$$

kde $\mathcal{R}_3(\alpha)$ je matice

$$\mathcal{R}_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.75}$$

Vznikne-li $S^{'}$ z S otočením okolo osy x_1 o úhel β, potom

$$\vec{x} = \mathcal{R}_1(\beta)\vec{x}^{'} \quad , \tag{2.76}$$

kde

$$\mathcal{R}_1(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \quad .$$

Z toho plyne, že vztah mezi složkami X, Y, Z a x, y, z zprostředkovává matice

$$\mathcal{R}(I, \Omega, \omega) = \mathcal{R}_3(\Omega)\, \mathcal{R}_1(I)\, \mathcal{R}_3(\omega) \quad .$$

Vynásobením dostaneme

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\cos I\sin\omega & -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos I\cos\omega & \sin\Omega\sin I \\ \sin\Omega\cos\omega - \cos\Omega\cos I\sin\omega & -\sin\Omega\sin\omega - \cos\Omega\cos I\cos\omega & -\cos\Omega\sin I \\ \sin I\sin\omega & \sin I\cos\omega & \cos I \end{pmatrix} \quad . \tag{2.77}$$

Soustava $[T, x, y, z]$ byla volena tak, že $z = 0$. Užitím (2.54) a matice $\mathcal{R}$ docházíme k výrazu pro X, Y, Z.

$$\begin{aligned} X &= (\cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\cos I\sin\omega)\, a(\cos u - e) - \\ &- (\cos\Omega\sin\omega + \sin\Omega\cos I\cos\omega)\, a\sqrt{1-e^2}\,\sin u \quad , \\ Y &= (\sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\cos I\sin\omega)\, a(\cos u - e) + \\ &+ (-\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos I\cos\omega)\, a\sqrt{1-e^2}\,\sin u \quad , \\ Z &= \sin I\sin\omega\, a(\cos u - e) + \sin I\cos\omega\, a\sqrt{1-e^2}\sin u \quad . \end{aligned} \tag{2.78}$$

Tutéž transformační matici (2.77) lze samozřejmě použít i pro pohyb po parabole či hyperbole.

2.9 Řešení pomocí Hamilton-Jacobiho rovnice

2.9.1 Hamiltonián ve sférických souřadnicích

Vyjdeme z lagrangiánu (2.10) s $U(r)$ určeným Newtonovým všeobecným gravitačním zákonem.

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + G\frac{\mu m}{r} \quad . \tag{2.79}$$

Zavedeme sférické souřadnice r, ϑ, φ vztahy

$$\begin{aligned} X &= r\sin\vartheta\cos\varphi \quad , \\ Y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \quad , \\ Z &= r\cos\vartheta \quad . \end{aligned} \tag{2.80}$$

Potom

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) + G\frac{\mu m}{r} \quad . \tag{2.81}$$

Definujeme-li zobecněné impulsy podle (1.5), dostáváme

$$p_r = \mu\,\dot{r} \quad , \quad p_\vartheta = \mu\,r^2\dot{\vartheta} \quad , \quad p_\varphi = \mu\,r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} \quad , \tag{2.82}$$

zatímco pro hamiltonián dává (1.7)

$$H = \frac{1}{2\mu}\left[p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}\right)\right] - G\frac{\mu m}{r} \quad . \tag{2.83}$$

Kromě integrálu energie $H = E$ dostáváme okamžitě i

$$p_\varphi = M_Z = \text{konst.} \tag{2.84}$$

Za okamžik ukážeme, že konstanta, které se p_φ rovná, je opravdu M_Z. Vynásobením Hamiltonovy kanonické rovnice pro $\dot{p}_\vartheta$ impulsem p_ϑ dostaneme

$$\begin{aligned} p_\vartheta\,\dot{p}_\vartheta &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p_\vartheta^2}{2}\right) = -p_\vartheta\frac{\partial H}{\partial\vartheta} = -\mu\,r^2\dot{\vartheta}\frac{1}{2\mu}\frac{p_\varphi^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\frac{1}{\sin^2\vartheta} = \\ &= -\frac{1}{2}p_\varphi^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sin^2\vartheta} \end{aligned}$$

a tedy

$$p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} = M^2 = \text{konst.} \tag{2.85}$$

Snadno se přesvědčíme, že tyto integrály nedávají nic nového a integrál (2.84) je opravdu Z–ovou složkou vektoru momentu hybnosti $\vec{M}$ a integrál (2.85) je velikost M tohoto momentu. Proveďme výpočet pro M_Z, pro M je výpočet delší, ale probíhá podobně.

$$\begin{aligned} M_Z &= \mu(X\dot{Y} - Y\dot{X}) = \mu(r\sin\vartheta\cos\varphi[\dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\cos\vartheta\sin\varphi\,\dot{\vartheta} + \\ &+ r\sin\vartheta\cos\varphi\,\dot{\varphi}] - r\sin\vartheta\sin\varphi[\dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + r\cos\vartheta\cos\varphi\,\dot{\vartheta} - \\ &- r\sin\vartheta\sin\varphi\,\dot{\varphi}]) = \mu\,r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} \quad . \end{aligned}$$

Tedy opravdu podle (2.82) je $p_\varphi = M_Z$.

Všimněme si, že hamiltonián (2.83) je separovatelný, tedy je ve tvaru (1.56). Proto budeme řešení Hamilton-Jacobiho rovnice

$$\frac{1}{2\mu}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right\} - G\frac{\mu m}{r} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{2.86}$$

hledat ve tvaru

$$F = -Et + F_1(\varphi) + F_2(\vartheta) + F_3(r) \quad . \tag{2.87}$$

2.9.2 Vsuvka o řešení Hamilton-Jacobiho rovnice pro částici v jednorozměrném potenciálu

Tato vsuvka je zde pro objasnění dvou komplikací v řešení Hamilton Jacobiho rovnice na jednoduchém případě, aby pochopení odpovídajících kroků nečinilo potíže v komplikovanějším případě (2.86). Vezměme Hamiltonián

$$H = \frac{1}{2}p^2 + U(q) \tag{2.88}$$

a odpovídající Hamilton-Jacobiho rovnici

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + U(q) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0\ . \tag{2.89}$$

Předpokládejme, že energie E, je větší než nějaké lokální minimum $U(q)$ a vyšetřujeme periodický pohyb v okolí tohoto minima. Hledejme řešení ve tvaru $F = -Et + F_0(q, E)$. Potom

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial q}\right)^2 = 2\,(E - U(q)) \tag{2.90}$$

Vezmeme-li za F_0

$$F_0 = \int\limits_{q_1(E)}^{q} \sqrt{2\,(E - U(q))}\,\mathrm{d}q, \tag{2.91}$$

kde q_1 je menší z obou kořenů rovnice $U(q) = E$, kde tyto kořeny ohraničují vyšetřovanou oblast možného pohybu s $E \geq U(q)$, potom je

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \sqrt{2\,(E - U(q))} \tag{2.92}$$

vždy kladné a kanonická transformace definovaná vytvořující funkcí $F(q, E, t)$ je definována jen pro nezáporná p. Protože víme, že pohyb v prostoru (q, p) je uzavřená křivka symetrická podle osy q, vidíme, že pro popis pohybu potřebujeme i transformaci pro záporná p. V oblasti $p \leq 0$ vezmeme

$$F_0 = -\int\limits_{q_1(E)}^{q} \sqrt{2\,(E - U(q))}\,\mathrm{d}q, \tag{2.93}$$

Tak musíme vždy rozdělit fázový prostor na oblast kladných a záporných impulsů a funkci F definovat jinak v různých oblastech. Jinak transformační rovnice vedou jen na řešení v části fázového prostoru. To je první bod, který jsme chtěli ilustrovat. Druhým bodem je možná závislost spodní meze v (2.91) resp. (2.93) na nových impulsech (zde v jednorozměrném případě je jediný nový zobecněný impuls E). Potom je nová souřadnice Q

$$Q = -t \pm \frac{\partial}{\partial E} \int\limits_{q_1(E)}^{q} \sqrt{2\,(E - U(q))}\,\mathrm{d}q, \tag{2.94}$$

a zdálo by se že nestačí parciálně derivovat podintegrální výraz podle E a je třeba uvážit i závislost dolní meze v integrálu na E. Ukážeme, že tomu tak není a stačí jen parciální derivace podintegrálního výrazu. Z definice derivace máme

$$\frac{\partial}{\partial E}\int\limits_{q_1(E)}^{q}\sqrt{2\left(E-U(q)\right)}\,\mathrm{d}q = \tag{2.95}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int\limits_{q_1(E+h)}^{q}\sqrt{2\left(E+h-U(q)\right)}\,\mathrm{d}q-\int\limits_{q_1(E)}^{q}\sqrt{2\left(E-U(q)\right)}\,\mathrm{d}q\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{q_1(E+h)}^{q_1(E)}\sqrt{2\left(E+h-U(q)\right)}\,\mathrm{d}q+$$

$$\int\limits_{q_1(E)}^{q}\frac{\partial}{\partial E}\sqrt{2\left(E-U(q)\right)}\,\mathrm{d}q.$$

Platí ale

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{q_1(E+h)}^{q_1(E)}\sqrt{2\left(E+h-U(q)\right)}\,\mathrm{d}q=0. \tag{2.96}$$

V intervalu integrace nabývá nezáporná podintegrální funkce pro dostatečně malé h maxima v bodě $q_1(E)$, kde rovná $\sqrt{2h}$. Integrál je tak menší než maximum funkce krát délka integračního intervalu, ta je ovšem úměrná h (je totiž $h/\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_1}$) a limita je typu $h\sqrt{h}/h$, tedy opravdu vymizí.

Tedy závislost spodní meze na zobecněném impulsu není třeba pro parciální derivaci uvažovat. Proto je možno psát

$$Q=-t\pm\int\limits_{q_1(E)}^{q}\frac{\partial}{\partial E}\sqrt{2\left(E-U(q)\right)}\,\mathrm{d}q, \tag{2.97}$$

Význam konstanty Q dostaneme, položíme-li v (2.97) $q=q_1$. Vidíme, že $Q=-t_0$, kde t_0 je okamžik průchodu bodem obratu q_1.
Příklad: Pro lineární harmonický oscilátor máme $U(q)=\frac{1}{2}\omega^2q^2$, $q_1=-\sqrt{2E}/\omega$. Potom

$$F=-Et\pm\int\limits_{-\sqrt{2E}/\omega}^{q}\sqrt{2\left(E-\frac{1}{2}\omega^2q^2\right)}\,\mathrm{d}q, \tag{2.98}$$

kde znaménko plus platí pro oblast nezáporných p a znaménko - pro záporná p. Potom pro novou (konstantní) souřadnici Q dostaneme

$$Q=-t\pm\int\limits_{-\sqrt{2E}/\omega}^{q}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{2E}\sqrt{1-\frac{\omega^2q^2}{2E}}} \tag{2.99}$$

po substituci

$$y = \frac{\omega}{\sqrt{2E}} q, \tag{2.100}$$

je

$$Q = -t \pm \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} \tag{2.101}$$

Pro $p \geq 0$ tak dostaneme

$$t + Q = \frac{1}{\omega}\left(\arcsin(y) + \frac{\pi}{2}\right)$$

. odkud

$$q = -\frac{\sqrt{2E}}{\omega} \cos \omega (t + Q) \tag{2.102}$$

Toto řešení ovšem pro nás zatím platí jen pro rostoucí q, tj. $\omega(t+Q) \in< 0, \pi >\Rightarrow t \in< -Q, \frac{\pi}{\omega} - Q >$ Pro klesající q vede stejná substituce na

$$t + Q = \frac{1}{\omega}\left(\arccos(y) - \frac{\pi}{2}\right)$$

. Řešení má pak opět tvar (2.102) s tím, že nyní popisuje oblast nerostoucího q, tj. $t \in< -\frac{\pi}{\omega} - Q, -Q >$. Řešení (2.102) tak platí v obou oblastech.

2.9.3 Řešení Hamilton-Jacobiho rovnice problému dvou těles

Vraťme se nyní k řešení Hamilton-Jacobiho rovnice (2.86) ve tvaru (2.87). Z teorie Hamilton-Jacobiho rovnice víme, že hledáme řešení závislé na třech konstantách P_1, P_2, P_3. Uvidíme, že uvedené konstanty se v řešení objeví přirozenou cestou. Po dosazení z (2.86) do (2.87).

$$\frac{1}{2\mu}\left\{\left(\frac{\partial F_3}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \varphi}\right)^2\right]\right\} - G\frac{\mu m}{r} = E \tag{2.103}$$

Z poslední rovnice lze zřejmě vyjádřit $\frac{\partial F_1}{\partial \varphi}$ jako jakousi funkci $g(r, \vartheta)$. Odtud plyne, že $\frac{\partial F_1}{\partial \varphi}$ nesmí záviset na φ a je tedy konstantou P_1

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = P_1 \tag{2.104}$$

Význam této konstanty plyne ihned z transformační rovnice a (2.84)

$$p_\varphi = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = P_1 = M_Z$$

Nadále již budeme místo P_1 psát stále M_Z a víme že M_Z bude prvním z nových impulsů, na které povede kanonická transformace s vytvořující funkcí F. Dosadíme-li do (2.103)

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = M_Z, \tag{2.105}$$

můžeme vyjádřit část závislou na ϑ

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} M_Z^2 = P_2^2$$

jako funkci $g(r)$ a tedy tento výraz musí být nezápornou konstantou, kterou jsme tedy zavedli jako P_2^2. Význam konstanty P_2 dostaneme, dosadíme-li do poslední rovnice z transformační rovnice $p_\vartheta = \frac{\partial F_2}{\partial \vartheta}$. Srovnáním s (2.85) vidíme, že $P_2 = M$, tedy druhý nový impuls bude velikost momentu hybnosti. Pro F_2 tak dostáváme

$$\frac{\partial F_2}{\partial \vartheta} = \pm\sqrt{M^2 - \frac{M_Z^2}{\sin^2 \vartheta}} \tag{2.106}$$

Konečně pro zbývající část závislou na r musí platit

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} M^2\right] - G\frac{\mu m}{r} = E = P_3 \quad . \tag{2.107}$$

a tedy

$$\frac{\partial F_3}{\partial r} = \pm\sqrt{2\mu E + \frac{2G\mu^2 m}{r} - \frac{M^2}{r^2}} \tag{2.108}$$

Nalezneme-li funkce F_1, F_2, F_3 splňující (2.105),(2.106) a (2.108), potom (2.87) je vytvořující funkce kanonické transformace ke konstantním kanonickým elementům Q_1, Q_2, Q_3, M_Z, M, E. Další tři integrační konstanty Q_1, Q_2, Q_3 plynou ze vztahu

$$Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} \qquad i = 1, 2, 3 \quad . \tag{2.109}$$

Fázový prostor rozdělme na čtyři oblasti I, II, II, IV tak že

$$\begin{array}{cccc} I & \text{je} & p_r \geq 0 & p_\vartheta \leq 0 \\ II & \text{je} & p_r \geq 0 & p_\vartheta \geq 0 \\ III & \text{je} & p_r \leq 0 & p_\vartheta \geq 0 \\ IV & \text{je} & p_r \leq 0 & p_\vartheta \leq 0 \end{array} \quad .$$

Nebudeme se zabývat detailně všemi oblastmi. V oblasti I vezmeme v souladu s (2.106) a (2.108)

$$\begin{aligned} F &= -Et + M_Z\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} \sqrt{M^2 - \frac{M_Z^2}{\sin^2 \vartheta}}\, \mathrm{d}\vartheta + \qquad (2.110) \\ &+ \int_{r_1}^{r} \sqrt{2\mu E - \frac{M^2}{r^2} + 2G\frac{\mu^2 m}{r}}\, \mathrm{d}\vartheta, \end{aligned}$$

zatímco v oblasti IV

$$F = -Et + M_Z\varphi - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} \sqrt{M^2 - \frac{M_Z^2}{\sin^2\vartheta}}\,\mathrm{d}\vartheta - \int\limits_{r_1}^{r} \sqrt{2\mu E - \frac{M^2}{r^2} + 2G\frac{\mu^2 m}{r}}\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{2.111}$$

kde r_1 je menší ze dvou kořenů $r_{1,2}$ rovnice

$$2\mu E r^2 + 2G\mu^2 m r - M^2 = 0 \quad .$$

Tyto kořeny představují body obratu jednorozměrné křivky hladiny energie $p_r(r, M, E)$

$$\frac{1}{2\mu}\left[p_r^2 + \frac{1}{r}M_Z^2\right] - G\frac{\mu\, m}{r} = E \quad . \tag{2.112}$$

Změny r mohou při daných M, E probíhat jen mezi kořeny r_1, r_2 kde

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-G\frac{\mu\, m}{E} \pm \sqrt{\frac{G^2 m^2 \mu^2}{E^2} + 2\frac{M^2}{\mu E}}\right] \quad . \tag{2.113}$$

Po dosazení $M^2 = \mu^2 G m a(1 - e^2)$ a $E = -\frac{G\mu m}{2a}$ vidíme, že

$$r_{1,2} = a \pm ae \quad .$$

Zbývá určit význam nových souřadnic Q_i Předpokládejme, že výstupný uzel i pericentr leží buď v I nebo IV. Nejprve Q_1:
Jak v I, tak i ve IV

$$Q_1 = \frac{\partial F}{\partial M_Z} = \varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} \frac{M_Z}{\sin^2\vartheta\sqrt{M^2 - \frac{M_Z^2}{\sin^2\vartheta}}}\mathrm{d}\vartheta \quad . \tag{2.114}$$

Význam Q_1 určíme snadno pro $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (tj. při průchodu výstupným uzlem), kde $Q_1 = \varphi$, ale φ při průchodu výstupným uzlem je rovno délce výstupného uzlu Ω. Protože Q_1 je konstanta je $Q_1 = \Omega$ stále.
Určení významu nové souřadnice Q_2:

$$Q_2 = \frac{\partial F}{\partial M} = \mp \int\limits_{r_1}^{r} \frac{M}{\sqrt{2\mu E r^4 + 2G\mu^2 m r^3 - M^2 r^2}}\mathrm{d}r - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} \frac{M}{\sqrt{M^2 - \frac{M_Z^2}{\sin^2\vartheta}}}\mathrm{d}\vartheta \quad , \tag{2.115}$$

kde horní znaménko platí v oblasti I, dolní v oblasti IV. Určeme hodnotu Q_2 při průchodu pericentrem, kdy $r = r_1$,tedy

$$Q_2 = -\frac{M}{\sqrt{M^2 - \frac{M_Z^2}{\sin^2\vartheta}}}\mathrm{d}\vartheta \quad . \tag{2.116}$$

Představíme-li si v obr. 2.3 bod P' v rovině X, Y tam, kde jednotkovou kouli protíná hlavní kružnice procházející pericentrem a bodem Z, potom z pravoúhlého sférického trojúhelníka PP'**Omega**[1] dostaneme ze sinové věty

$$\cos\vartheta_p = \sin I \sin\omega,$$

kde ϑ_p je sférická souřadnice ϑ pro pericentr. Zavedeme-li do (2.116) substituci

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{M^2}{M^2 - M_Z^2}}\cos\vartheta = \frac{\cos\vartheta}{\sin I} \quad , \\ \mathrm{d}\xi &= -\frac{\sin\vartheta}{\sin I}\mathrm{d}\vartheta \quad , \end{aligned} \tag{2.117}$$

dává

$$Q_2 = \int\limits_0^{\sin\omega} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \omega \quad . \tag{2.118}$$

Tedy souřadnice $Q_2 = \omega$.
Určení Q_3:
Pro Q_3 určené v pericentru máme okamžitě

$$Q_3 = -t_0 \quad , \tag{2.119}$$

kde t_0 je okamžik průchodu pericentrem.

Dostáváme tak sadu konstantních kanonických elementů

$$\begin{aligned} P_1 &= M_z \quad , & P_2 &= M \quad , & P_3 &= E \quad , \\ Q_1 &= \Omega \quad , & Q_2 &= \omega \quad , & Q_3 &= -t_0 \quad . \end{aligned} \tag{2.120}$$

2.10 Delaunayovy proměnné

Provedeme-li podobně jako v předcházejícím odstavci kanonickou transformaci k novým souřadnicím a impulsům P_1, P_2, P_3 tak, že místo funkce F (2.87) vezmeme jen

$$F_0(r, \vartheta, \varphi, P_1, P_2, P_3) = F_1(\varphi, P_1) + F_2(\vartheta, P_1, P_2) + F_3(r, P_2, P_3) \quad , \tag{2.121}$$

[1] Jako **Omega**je míněn vzestupný uzel dráhy.

potom se při stejné volbě F_1, F_2, F_3 jako v kapitole 2.7 nezmění ani Q_1 ani Q_2. Nový hamiltonián však už nebude roven 0, ale přímo $E = P_3$. Nová souřadnice Q_3' bude tedy lineární funkcí času

$$\dot{Q}_3' = \frac{\partial P_3}{\partial P_3} = 1 \quad , \quad Q_3' = \frac{\partial F_0}{\partial P_3} = Q_3 + t = t - t_0 \quad . \tag{2.122}$$

Taková souřadnice Q_3' vzroste za periodu T o T. Místo konstantních kanonických elementů (2.120) dostáváme novou sadu kanonických proměnných

$$\begin{array}{llll} P_1 = M_z \quad , & P_2 = M \quad , & P_3 = E \quad , & \\ Q_1 = \Omega \quad , & Q_2 = \omega \quad , & Q_3' = t - t_0 \quad . & \end{array} \tag{2.123}$$

Je zřejmé, že vhodnou záměnou impulsu P_3 za nový impuls L tak, že $L(P_3)$, můžeme docílit toho, aby kanonicky sdružená souřadnice l byla rovna $n(t - t_0)$. Tedy l bude opravdu střední anomálií. Vzniklé kanonické elementy se pak nazývají *Delaunayovy kanonické proměnné* (nebo elementy) a značí se L, G, H, l, g, h. Pozor, rozlišujeme gravitační konstantu $\mathcal{G}$ a Delaunayovu proměnnou G. Aby se tyto proměnné nepletly, zavedeme konstantu

Delaunayovy kanonické proměnné

$$k = \mathcal{G} m \quad . \tag{2.124}$$

Vytvořující funkci pro přechod od (2.123) k Delaunayovým elementům definujeme

$$S(Q_1, Q_2, Q_3', L, G, H) = Q_1 H + Q_2 G - Q_3' \frac{\mu^3 k^2}{2L^2} \quad , \tag{2.125}$$

potom transformační vzorce

$$\begin{array}{ll} P_1 = M_z = \frac{\partial S}{\partial Q_1} = H \quad , & P_2 = M = \frac{\partial S}{\partial Q_2} = G \quad , \\ P_3 = E = \frac{\partial S}{\partial Q_3'} = -\frac{\mu^3 k^2}{2L^2} \quad , & l = \frac{\partial S}{\partial L} = Q_3' \frac{\mu^3 k^2}{L^3} \quad , \\ g = \frac{\partial S}{\partial G} = \omega = Q_2 \quad , & h = \frac{\partial S}{\partial H} = \Omega = Q_1 \quad . \end{array} \tag{2.126}$$

Vidíme, že Delaunayovy proměnné se liší od sady (2.123) jen v l, L, přitom ze vztahu (2.126) pro P_3 určíme nový hamiltonián, který se nezmění, neboť transformace nezávisí na čase, tedy

$$H = E = P_3 = -\frac{\mu^3 k^2}{2L^2} \quad . \tag{2.127}$$

Použitím (2.35) dostaneme vztah mezi L a a

$$L = \mu \sqrt{k\, a} \quad . \tag{2.128}$$

Snadno se přesvědčíme, že proměnná l je opravdu střední anomálie. Vyjádříme-li totiž n jako funkci L, dostaneme užitím (2.44) a (2.128)

$$n = \sqrt{\frac{k}{a^3}} = \frac{\sqrt{k}\, \mu^3 \sqrt{k^3}}{L^3} = \frac{\mu^3 k^2}{L^3} \quad . \tag{2.129}$$

tento koeficient stojí v (2.126) u $(t-t_0)$ ve výrazu pro l. Tedy můžeme shrnout, že *Delaunayovy kanonické elementy* jsou (2.36)

$$\begin{array}{ll} L = \mu\sqrt{k\,a} & l = n(t-t_0) \\ G = M = \mu\sqrt{k\,a(1-e^2)} & g = \omega \\ H = \mu\sqrt{k\,a(1-e^2)}\cos I & h = \Omega \quad . \end{array} \tag{2.130}$$

Odtud nazpět vyjádření pro a, e, I pomocí L, G, H je

$$a = \frac{L^2}{\mu^2 k} \quad , \quad e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2} \quad , \quad \cos I = \frac{H}{G} \quad . \tag{2.131}$$

Známe-li 6 Delaunayových kanonických elementů, můžeme určit, jak polohový vektor $\vec{r} \equiv (X, Y, Z)$, tak vektor rychlosti $\dot{\vec{r}} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$. Složky vektoru $\vec{r}$ splňují rovnici

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = a\mathcal{R}(I, \Omega, \omega) \begin{pmatrix} \cos u \; - e \\ \sqrt{1-e^2}\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.132}$$

kde $\mathcal{R}(I, \Omega, \omega)$ je matice 3×3 daná v (2.77). Derivací Keplerovy rovnice dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{n}{1 - e\cos u} \quad , \tag{2.133}$$

tedy pro složky vektoru $\dot{\vec{r}}$ máme

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \mathcal{R}(I, \Omega, \omega) \begin{pmatrix} -\sin u \\ \sqrt{1-e^2}\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \frac{n\,a}{1 - e\cos u} \quad . \tag{2.134}$$

V principu je tedy možno každou funkci $f(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, t)$ vyjádřit jako funkci šesti Delaunayových elementů a času.

2.11 Použití rozvojů pro řešení Keplerovy rovnice

2.11.1 Besselovy funkce

Vyšetřujme Laurentovu řadu pro funkci komplexní proměnné z v okolí singulárního bodu $z = 0$

$$\Phi(z) = \exp\left[\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right] \quad , \tag{2.135}$$

kde x je reálný parametr. Koeficienty Laurentovy řady jsou tedy funkcemi parametru x.

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, z^n \quad . \tag{2.136}$$

Tato řada musí konvergovat v celé komplexní rovině mimo bod $z = 0$. Funkce $J_n(x)$ se nazývají *Besselovy funkce prvního druhu n-tého řádu*, funkce $\Phi(z)$ je vytvořující funkcí pro Besselovy funkce. Z (2.135) je zřejmé, že $\Phi(z) = \Phi(-z^{-1})$. Dosazením z (2.136) a srovnáním koeficientu u z^n dostaneme

Besselovy funkce prvního druhu

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad . \tag{2.137}$$

z Taylorových rozvojů pro exponenciální funkci máme

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{2}xz\right) &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^p \frac{z^p}{p!} \quad , \\ \exp\left(-\frac{1}{2}xz^{-1}\right) &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left(\frac{x}{2}\right)^q \frac{z^{-q}}{q!} \quad . \end{aligned}$$

Vynásobením dostaneme

$$\Phi(z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{p!q!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+q} z^{p-q} \quad .$$

Položíme-li $p - q = n$ a sčítáme nejprve přes $n \in (-\infty, \infty)$, potom přes $q \in (\max(0, -n), \infty)$, pak

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=\max(0,-n)}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!(n+q)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q} z^n \quad .$$

Pro kladné n je tedy

$$J_n(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!(n+q)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q} \quad , \quad n \geq 0 \quad . \tag{2.138}$$

Všimněte si, že platí

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \quad . \tag{2.139}$$

Integrální formule

Odvoďme několik dalších vlastností Besselových funkcí. Dokážeme nejprve tzv. *integrální formuli*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \quad . \tag{2.140}$$

Položme v rovnici

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\, z^k \qquad (2.141) \\ z &= \exp \mathrm{i}\,\varphi \quad . \end{aligned}$$

Dostaneme

$$\exp(\mathrm{i}\,x\sin\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\,\exp\mathrm{i}\,k\,\varphi \quad . \tag{2.142}$$

Vynásobením obou stran poslední rovnice $\exp(-\mathrm{i}\,n\varphi)$ a integrací přes φ v intervalech $(-\pi,\pi)$ dostaneme

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(\mathrm{i}\,x\sin\varphi - \mathrm{i}\,n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \quad .$$

Rozepíšeme-li integrál na součet integrálu přes intervaly $(-\pi, 0)$ a $(0,\pi)$ a v prvém integrálu změníme φ na $-\varphi$, dostaneme

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} [\exp(\mathrm{i}\,n\varphi - \mathrm{i}\,x\sin\varphi) + \exp(-\mathrm{i}\,n\varphi + \mathrm{i}\,x\sin\varphi)]\,\mathrm{d}\phi\,,$$

což je právě integrální formule (2.140). Z rovnice (2.142) dále snadno odvodíme srovnáním reálné a imaginární části

$$\begin{aligned}\cos(x\sin\varphi) &= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\,\cos 2n\varphi \\ \sin(x\sin\varphi) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\,\sin(2n-1)\varphi \quad .\end{aligned} \tag{2.143}$$

Dále odvodíme rekurentní vztah

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x) \quad , \tag{2.144}$$

který umožňuje určit Besselovu funkci $n+1$ řádu pomocí Besselových funkcí dvou nejbližších nižších řádů. Derivací rovnice (2.141) podle z dostaneme

$$\frac{x}{2}(1+z^{-2})\exp\left[\frac{x}{2}(z-z^{-1})\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)\,z^{n-1} \quad ,$$

tedy

$$\frac{x}{2}(1+z^{-2})\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)\,z^{n-1} \quad .$$

Srovnání koeficientů u z^{n-1} dává

$$\frac{x}{2}\,[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] = nJ_n(x) \quad , \tag{2.145}$$

odkud už okamžitě plyne (2.144). Další vztah, který odvodíme, bude vztah pro výpočet derivace Besselových funkcí

$$J_n^{'}(x) = \frac{1}{2}\,[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad . \tag{2.146}$$

Ten dostaneme derivováním (2.141) podle x

$$\frac{1}{2}(z - z^{-1}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^{'}(x)\, z^n$$

Srovnání koeficientů u z^n dává (2.146). Užitím (2.145) můžeme vyjádřit derivace Besselových funkcí n-tého řádu pomocí Besselových funkcí nižších řádů

$$J_n^{'}(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \quad . \tag{2.147}$$

Pro $x = 0$ je podle (2.138)

$$J_n(0) = \delta_{n0} \quad .$$

Pokud jde o $J_n^{'}(0)$, dostaneme z (2.146), že nenulové jsou pouze

$$J_1^{'}(0) = \frac{1}{2} \quad , \quad J_{-1}^{'}(0) = -\frac{1}{2} \quad ,$$

jinak $J_n^{'}(0) = 0$ pro $n \neq \pm 1$.

Besselova rovnice

Konečně dosazením z (2.138) se snadno přesvědčíme, že Besselovy funkce splňují tzv. *Besselovu rovnici*

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_n(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}J_n(x)}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0 \quad . \tag{2.148}$$

2.11.2 Řešení Keplerovy rovnice

Hledejme vyjádření excentrické anomálie $u(l)$ v závislosti na střední anomálii tak, aby byla splněna Keplerova rovnice[2]

$$u - e \sin u \; = l \quad . \tag{2.149}$$

Při změně l o 2π se u změní též o 2π, tedy $\sin u$ je periodickou funkcí l. Můžeme tedy rozvinout

$$\sin u \; = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sin(kl) \quad . \tag{2.150}$$

K ozřejmění rozvoje (2.150) připomeňme několik poznatků o Fourierových řadách. Obecně každou periodickou funkci l (s periodou 2π) je možno rozvinout ve Fourierovu řadu

$$f(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp \mathrm{i}\, k\, l \quad , \tag{2.151}$$

[2]Kód v jazyku C pro řešení Keplerovy rovnice:
u = l
while (fabs (qq = u - e*sin(u) - l) ¿ 1.e-14)
u = u - qq / (1 - e*cos(u));

kde

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(l)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, nl}\, \mathrm{d}l \quad . \tag{2.152}$$

Je-li $f(l)$ reálná funkce, musí platit

$$x_{-n} = x_n^* \quad . \tag{2.153}$$

Potom

$$\begin{aligned} f(l) &= x_0 + 2\Re \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k\, l} = \\ &= x_0 + 2\Re \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\Re x_k + \mathrm{i}\, \Im x_k)(\cos k\, l + \mathrm{i} \sin k\, l)\right] = \\ &= x_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\Re x_k \cos kl - \Im x_k \sin k\, l) \quad . \end{aligned}$$

Reálnou 2π-periodickou funkci $f(l)$ je tedy možno rozvinout v řadu

$$f(l) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cos kl + s_k \sin kl) \quad , \tag{2.154}$$

kde

$$\begin{aligned} c_0 &= x_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(l)\, \mathrm{d}l \\ c_k &= 2\Re x_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(l)\, \cos nl\, \mathrm{d}l \\ s_k &= -2\Im x_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(l)\, \sin nl\, \mathrm{d}l \quad . \end{aligned} \tag{2.155}$$

Je-li funkce $f(l)$ navíc lichou funkcí l, tj. $f(l) = -f(-l)$, pak $f(l)\, \cos nl$ je též lichou funkcí l a tedy $c_k = 0$ pro $k = 0, 1, \ldots$. Potom je

$$f(l) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sin kl \quad , \quad s_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(l)\, \sin kl\, \mathrm{d}l \tag{2.156}$$

Je-li funkce $f(l)$ reálná, 2π-periodická a sudá, tj. $f(l) = f(-l)$, pak $f(l)\, \sin nl$ je lichá funkce a $s_k = 0$ pro $k = 0, 1, \ldots$. Potom platí

$$f(l) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kl$$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f(l)\,\mathrm{d}l \\ c_k &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(l)\,\cos nl\,\mathrm{d}l \qquad k\neq 0 \quad . \end{aligned} \tag{2.157}$$

Zatímco vzorce (2.156) resp. (2.157) platí speciálně pro lichou resp. sudou reálnou funkci, vzorec (2.154) s reálnými koeficienty c_k, s_k platí pro každou reálnou, 2π-periodickou funkci $f(l)$. Vztah mezi reálnými c_k, s_k a komplexními x_k dává (2.155), odkud plyne

$$\begin{aligned} x_k &= \Re x_k + \mathrm{i}\,\Im x_k = \frac{1}{2}(c_k - \mathrm{i}\,s_k) \quad \text{pro} \quad k\neq 0 \quad , \\ x_0 &= c_0 \quad . \end{aligned} \tag{2.158}$$

Z těchto obecných poznámek k Fourierově transformaci vidíme, že v rozvoji (2.150) platí podle (2.156)

$$s_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin u \;\; \sin kl\,\mathrm{d}l \quad . \tag{2.159}$$

Použijeme věty o integraci per partes

$$\begin{aligned} s_k &= -\frac{2}{\pi k}\int\limits_0^\pi \sin u\;\frac{\mathrm{d}(\cos kl)}{\mathrm{d}l}\,\mathrm{d}l = \\ &= -\frac{2}{\pi k}\sin u\;\cos kl\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi k}\int\limits_0^\pi \frac{\mathrm{d}(\sin u)}{\mathrm{d}l}\cos kl\,\mathrm{d}l = \\ &= \frac{2}{\pi k}\int\limits_0^\pi \cos u\;\cos kl\,\mathrm{d}u \quad . \end{aligned}$$

Dosadíme za l z Keplerovy rovnice a použijeme vzorce

$$\cos b\cos c = \frac{1}{2}[\cos(b+c)+\cos(b-c)] \quad ,$$

dostaneme

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{2}{\pi k}\int\limits_0^\pi \cos u\;\cos[k(u-e\sin u)]\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{\pi k}\int\limits_0^\pi \cos[(k+1)u - ek\sin u]\,\mathrm{d}u + \\ &+ \frac{1}{\pi k}\int\limits_0^\pi [\cos(k-1)u - ek\;\sin u]\,\mathrm{d}u \quad . \end{aligned}$$

Podle integrální formule pro Besselovy funkce (2.140)

$$s_k = \frac{1}{k}\left[J_{k+1}(ke) + J_{k-1}(ke)\right] \quad .$$

Konečně rekurentní formule (2.144) dává

$$s_k = \frac{2}{ke} J_k(ke) \quad . \tag{2.160}$$

Tím jsme určili koeficienty v rozvoji (2.150). Řešení Keplerovy rovnice je pak možno zapsat

$$u = l + e \sin u \ = l + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ke) \sin(kl) \quad . \tag{2.161}$$

Koeficienty

$$A_k = \frac{2}{k} J_k(ke) \tag{2.162}$$

v rozvoji

$$u \ = l + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kl) \tag{2.163}$$

začínají vždy k-tou mocninou e, protože Besselova funkce (2.138) začíná mocninou argumentu určenou řádem. S přesností do e^7 tak dostáváme užitím (2.138)

$$\begin{aligned}
A_1 &= e(1 + \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{19} - \frac{e^6}{9216} + \ldots) \quad , \\
A_2 &= \frac{e^2}{2}(1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{24} - \ldots) \quad , \\
A_3 &= \frac{3e^3}{8}(1 - \frac{9e^2}{16} + \frac{81e^4}{640} - \ldots) \quad , \\
A_4 &= \frac{e^4}{3}(1 - \frac{4e^2}{5} + \ldots) \quad , \\
A_5 &= \frac{125e^5}{384}(1 - \frac{25e^2}{24} + \ldots) \quad , \\
A_6 &= \frac{27e^6}{80}(1 - \ldots) \quad , \\
A_7 &= \frac{7^5 e^7}{6!2^6} \quad .
\end{aligned}$$

Tak je možno řešit Keplerovu rovnici v libovolném přiblížení, pokud jde o mocniny e. Řešení je dáno rovnicí (2.163) a (2.162).

2.11.3 Rozvoj vzdálenosti r ve Fourierovu řadu

Protože r je opět 2π-periodickou reálnou funkcí l, navíc funkcí sudou, můžeme hledat rozvoj r v kosinovou řadu typu (2.157). Protože

$$\frac{r}{a} = (1 - e \cos u) \quad , \tag{2.164}$$

najdeme nejprve rozklad řady pro $\cos u$

$$\cos u \;=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kl \quad .$$

Podle (2.157)

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos u \;\mathrm{d}l \quad , \quad c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos u \;\cos kl\,\mathrm{d}l \quad , \quad k \neq 0 \quad .$$

Pro výpočet c_0 dosadíme z Keplerovy rovnice $\mathrm{d}l = (1 - e\cos u)\mathrm{d}u$ a obdržíme

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos u(1 - e\cos u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \\ &= -\frac{1}{\pi}e\frac{\pi}{2} = -\frac{e}{2} \quad . \end{aligned}$$

Při výpočtu c_k pro $k \neq 0$ postupujeme analogicky jako při výpočtu koeficientu s_k v kapitole 2.11.2

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} \cos u \frac{\mathrm{d}\sin kl}{\mathrm{d}l}\,\mathrm{d}l = \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} \sin u \;\sin kl\,\mathrm{d}u \;= \\ &= \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} \sin(ku - ke\sin u)\sin u\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi} \left\{\cos\left[(k-1)u - ke\sin u \;- \cos(k+1)u - ke\sin u\;\right]\right\}\mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{k}\left[J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)\right] = \frac{2}{k}J_k^{'}(ke) \quad . \end{aligned}$$

Dosazením do (2.155) dostaneme

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos kl \quad , \tag{2.165}$$

kde

$$B_k = \frac{2e}{k}\,J_k^{'}(ke) = \frac{2e}{k^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}J_k(ke) \quad . \tag{2.166}$$

Použitím (2.138) dostaneme pro B_k do stupně e^7 ($\xi = e/2$)

$$\begin{aligned} B_1 &= 2\xi - 3\xi^3 + \frac{5}{6}\xi^5 - \frac{7}{72}\xi^7 + \ldots \quad , \\ B_2 &= 2\xi^2 - \frac{16}{3}\xi^4 + 4\xi^6 - \ldots \quad , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_3 &= 3\xi^3 - \frac{45}{4}\xi^5 + \frac{567}{40}\xi^7 - \dots \quad , \\
B_4 &= \frac{16}{3}\xi^4 - \frac{128}{5}\xi^6 + \dots \quad , \\
B_5 &= \frac{125}{12}\xi^5 - \frac{4375}{72}\xi^7 + \dots \quad , \\
B_6 &= \frac{108}{5}\xi^6 - \dots \quad , \\
B_7 &= \frac{16807}{360}\xi^7 - \dots \quad .
\end{aligned}
$$

Opět B_n začíná stupněm e^n. Uveďme ještě rozvoj pro převrácenou hodnotu vzdálenosti. Všimněme si nejprve, že podle Keplerovy rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = \frac{1}{1 - e\cos u} = \frac{a}{r} \quad .$$

Derivujeme-li (2.163) podle l, bude

$$\frac{a}{r} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k k)\cos(kl) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2J_k(ke)\,\cos(kl) \quad . \tag{2.167}$$

2.11.4 Řady pro funkce pravé anomálie

Pro funkci $\cos v$ dostaneme rozvoj vyjádřením $\cos v$ z rovnice elipsy

$$\cos v = -\frac{1}{e} + \frac{1-e^2}{e}\frac{a}{r} \quad .$$

Dosazením z (2.167) dostaneme

$$\cos v = -e + 2\frac{1-e^2}{e}\sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke)\cos kl \quad . \tag{2.168}$$

Pro funkci $\sin v$ využijeme vztahu

$$\sin v = \frac{1}{e}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{r}{a}\right) \quad . \tag{2.169}$$

Abychom dokázali (2.169), určíme nejprve $\sin v$ pomocí u

$$\sin v = \frac{a\sin u\sqrt{1-e^2}}{r} = \frac{\sin u\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos u)} \quad .$$

Dosazením za $\sin u\ /(1-e\cos u)$ z rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}(1-e\cos u) = e\sin u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = e\sin u\,\frac{1}{1-e\cos u} \quad ,$$

dostaneme přímo (2.169). Derivace rozvoje (2.165) pak dává

$$\begin{aligned}\sin v &= \frac{1}{e}\sqrt{1-e^2}\sum_{k=1}^{\infty} B_k k\ \sin kl = \\ &= \sqrt{1-e^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}J_k(ke)\sin kl \quad .\end{aligned} \tag{2.170}$$

Podobně bychom mohli rozvíjet $r\sin nv$ atd. Později v kapitole o Newcombových operátorech odvodíme postup pro výpočet tzv. Hansenových koeficientů $X_k^{nm}(e)$, které vystupují v rozvoji

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \mathrm{i}\,mv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{nm}(e)\exp \mathrm{i}\,kl \quad . \tag{2.171}$$

Hansenovy koeficienty

Funkce vlevo je očividně 2π-periodickou funkcí l a tedy je možno ji rozvinout ve Fourierovu řadu. Koeficienty tohoto rozvoje mají tři indexy a nazývají se *Hansenovy koeficienty.* Zapíšeme-li obdobně jako v (2.156) a (2.157)

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv &= \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{nm}(e)\cos jl \quad , \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j^{nm}(e)\sin jl \quad ,\end{aligned} \tag{2.172}$$

dostaneme

$$\begin{aligned}S_k^{nm} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv \sin kl\,\mathrm{d}l \quad , \\ C_k^{nm} &= \frac{2}{\pi(\delta_k+1)}\int_0^{\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv\cos kl\,\mathrm{d}l \quad .\end{aligned} \tag{2.173}$$

Pro $X_k^{nm}(e)$ podle (2.152) máme

$$\begin{aligned}X_k^{nm}(e) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp \mathrm{i}(mv-kl)\,\mathrm{d}l = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n (\cos mv + \mathrm{i}\sin mv)(\cos kl - \mathrm{i}\sin kl)\,\mathrm{d}l = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n (\cos mv\cos kl + \sin mv \sin kl)\,\mathrm{d}l \quad .\end{aligned} \tag{2.174}$$

Imaginární část jako integrál z liché funkce vypadla, tedy Hansenovy koeficienty jsou reálné. Navíc platí podle (2.173) a (2.174)

$$\begin{aligned} X_k^{nm}(e) &= \frac{1}{2}\Big(S_k^{nm}(e) + C_k^{nm}(e)\Big) \quad \text{pro } k \neq 0 \quad , \\ X_0^{nm}(e) &= C_0^{nm}(e) \quad . \end{aligned} \tag{2.175}$$

Protože podle (2.174) je pro $k \neq 0$

$$X_{-k}^{nm}(e) = \frac{1}{2}\Big(-S_k^{nm}(e) + C_k^{nm}(e)\Big) \quad , \tag{2.176}$$

můžeme naopak $C_k^{nm}(e), S_k^{nm}$ vyjádřit jako funkce Hansenových koeficientů. Sečteme-li, resp. odečteme (2.175) a (2.176), dostaneme

$$\begin{aligned} C_k^{nm}(e) &= X_k^{nm}(e) + X_{-k}^{nm}(e) \quad , \quad k \neq 0 \\ S_k^{nm}(e) &= X_k^{nm}(e) - X_{-k}^{nm}(e) \quad . \end{aligned} \tag{2.177}$$

Koeficienty $X_k^{nm}(e)$ byly tabelovány již v roce 1861 (Cayley,A.: 1861, Memoirs R.A.S., 29, str.257). Autor těchto tabulek se omezil na členy do stupně e^7 včetně, n je celé číslo v intervalu $< -5, 4 >$, $m \in < 0, 5 >$. Hansenovy koeficienty $X_k^{nm}(e)$ se hledají u symbolu $[\cos + \sin]^k$ s příslušným n, m, zatímco $X_{-k}^{nm}(e)$ se najde u symbolu $[\cos - \sin]^k$ s příslušným n, m. Pod označením $[\cos]^k$ je tabelována veličina $\frac{1}{2}C_k^{nm}(e)$ a pod označením $[\sin]^k$ veličina $\frac{1}{2}S_k^{nm}(e)$. Pro $k = 0$ je $[\cos]^0$ přímo $C_0^{nk}(e)$. Tabulky do 12 stupně v e byly publikovány později (Cherniack, J.R.: 1972, SAO Special Report No.346 - Computation of Hansen Coefficients.)

Provedeme-li komplexní sdružení rovnice (2.171) a srovnáme s rovnicí, kde m přejde na $-m$, dostaneme podmínku symetrie Hansenových koeficientů

$$X_{-k}^{nm}(e) = X_k^{n,-m}(e) \quad . \tag{2.178}$$

Hansenovy koeficienty se hojně využívají pro konstrukci rozvojů podle střední anomálie. Např. je možno dokázat

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{\cos}{\sin}(mv + b) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} X_j^{nm} \frac{\cos}{\sin}(jl + b) \quad . \tag{2.179}$$

Později uvidíme, že rozvoj Hansenova koeficientu $X_k^{nm}(e)$ podle excentricity začíná mocninou $e^{|m-k|}$.

Některé speciální Hansenovy koeficienty jsme v této kapitole odvodili. Rovnice (2.165) dává

$$\begin{aligned} X_k^{1,0}(e) &= -B_k(e) = -\frac{2e}{k^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}J_k(ke) \quad \text{pro} \quad k \neq 0 \quad , \\ X_0^{1,0}(e) &= 1 + \frac{e^2}{2} \quad , \\ &, \\ X_0^{-1,0}(e) &= 1 \quad , \\ X_k^{-1,0}(e) &= J_k(ke) \quad . \end{aligned}$$

2.11.5 Rovnice středu

Podobně rozdíl mezi pravou a střední anomálií je 2π-periodickou funkcí střední anomálie. Koeficienty rozvoje

$$v - l = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(e) \sin kl \tag{2.180}$$

jsou (opět $\xi = e/2$)

$$\begin{aligned}
H_1 &= 4\xi - 2\xi^3 + \frac{5}{3}\xi^5 + \frac{107}{36}\xi^7 - \dots \quad , \\
H_2 &= 5\xi^2 - \frac{22}{3}\xi^4 + \frac{17}{3}\xi^6 - \dots \quad , \\
H_3 &= \frac{26}{3}\xi^3 - \frac{43}{2}\xi^5 + \frac{95}{4}\xi^7 - \dots \quad , \\
H_4 &= \frac{103}{6}\xi^4 - \frac{902}{15}\xi^6 + \dots \quad , \\
H_5 &= \frac{1097}{30}\xi^5 - \frac{5957}{36}\xi^7 \dots \quad , \\
H_6 &= \frac{1223}{15}\xi^6 - \dots \quad , \\
H_7 &= \frac{47\,273}{252}\xi^7 - \dots \quad .
\end{aligned}$$

Rovnici (2.180) nazýváme rovnicí středu.

2.12 Užitečné vztahy pro Hansenovy koeficienty

2.12.1 Rekurentní vzorce pro Hansenovy koeficienty

Nejprve dokážeme rekurentní vztah:

$$(1-e^2)X_k^{n,m}(e) = X_k^{n+1,m} + \frac{e}{2}\left(X_k^{n+1,m+1} + X_k^{n+1,m-1}\right) \tag{2.181}$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}
(\frac{r}{a})^n &= (\frac{r}{a})^{n+1}\frac{1+e\cos v}{1-e^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow (1-e^2)(\frac{r}{a})^n &= (\frac{r}{a})^{n+1} + (\frac{r}{a})^(n+1)\frac{e}{2}(e^{\mathrm{i}\,v} + e^{-\mathrm{i}\,v}) \Rightarrow \\
\Rightarrow (1-e^2)(\frac{r}{a})^n \exp \mathrm{i}\, mv &= (\frac{r}{a})^{n+1}\exp \mathrm{i}\, mv + (\frac{r}{a})^(n+1)\frac{e}{2}(\exp \mathrm{i}(m+1)v + \exp \mathrm{i}(m-1)v)
\end{aligned}$$

Jednotlivé členy nyní rozvineme pomocí Hansenových koeficientů a srovnáme dle koeficientů u $\exp \mathrm{i}\, kl$:

$$(1-e^2)X_k^{n,m} = X_k^{n+1,m} + \frac{e}{2}\left(X_k^{n+1,m+1} + X_k^{n+1,m-1}\right)$$

Dalším rekurentním vztahem, který dokážeme, bude:

$$k\sqrt{1-e^2}X_k^{n,m} = m(1-e^2)X_k^{n-2,m} + \frac{ne}{2}\left(X_k^{n-1,m-1} - X_k^{n-1,m+1}\right) \quad (2.182)$$

Důkaz:
Následující vztah derivujme dle střední anomálie l:

$$(\frac{r}{a})^n \exp \mathrm{i}\, mv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{n,m} \exp \mathrm{i}\, kl$$

Dostaneme:

$$\left(n(\frac{r}{a})^{n-1}\frac{1}{a}\frac{\partial r}{\partial l} + \mathrm{i}\, m(\frac{r}{a})^n \frac{\partial v}{\partial l}\right) \exp \mathrm{i}\, mv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\, kX_k^{n,m} \exp \mathrm{i}\, kl \quad (2.183)$$

Provedeme nezbytné přípravy — nalezneme příhodnější zápis parciálních derivací:

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos v)^2} e \sin v \frac{\partial v}{\partial l} = \frac{e \sin v r^2}{a(1-e^2)}\frac{\partial v}{\partial l} \quad (2.184)$$

Pro určení $\frac{\partial v}{\partial l}$ lze použít například zákon zachování momentu hybnosti:

$$\sqrt{GMa(1-e^2)} = r^2\dot{v} = r^2\frac{\partial v}{\partial l} n \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{r^2 n} = \frac{sqrt 1 - e^2 n a^2}{r^2 n} = \sqrt{1-e^2}\frac{a^2}{r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \sqrt{1-e^2}\frac{a^2}{r^2} \quad (2.185)$$

(2.185) spolu s (2.184) dává:

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{e \sin v r^2}{a(1-e^2)}\sqrt{1-e^2}\frac{a^2}{r^2} = \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}\sin v} \quad (2.186)$$

(2.185) a (2.186) dosadíme do zderivované rovnice (2.183) a přepíšeme sinus do exponenciálního tvaru:

$$\left(n(\frac{r}{a})^{n-1}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{2\,\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\, v} - e^{-\mathrm{i}\, v}) + \mathrm{i}\, m(\frac{r}{a})^n(\frac{a^2}{r^2})\sqrt{1-e^2}\right) \exp \mathrm{i}\, mv =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\, kX_k^{n,m} \exp \mathrm{i}\, kl$$

Levou stranu rovnice zapíšeme pomocí Hansenových koeficientů a jako u předchozího důkazu srovnáme členy u $\exp \mathrm{i}\, kl$:

$$\frac{ne}{2\,\mathrm{i}\sqrt{1-e^2}}\left(X_k^{n-1,m+1} - X_k^{n-1,m-1}\right) + \mathrm{i}\, m\sqrt{1-e^2}X_k^{n-2,m} = \mathrm{i}\, kX_k^{n,m}$$

Nyní již jen obě strany vynásobíme $-\mathrm{i}\sqrt{1-e^2}$ a přehodíme levou a pravou stranu:

$$k\sqrt{1-e^2}X_k^{n,m} = m(1-e^2)X_k^{n-2,m} + \frac{ne}{2}\left(X_k^{n-1,m-1} - X_k^{n-1,m+1}\right)$$

Ze vztahů (2.181) a (2.182) odvodíme následující rekurentní vzorce:

$$\begin{aligned} k(1-e^2)^{3/2}X_k^{n,m} &= m(1+\frac{e^2}{2})X_k^{n,m} + \frac{e}{2}(2m-n)X_k^{n,m+1} + \\ &\quad \frac{e}{2}(2m+n)X_k^{n,m-1} + \frac{e^2}{4}(m-n)X_k^{n,m+2} + \\ &+\frac{e^2}{4}(m+n)X_k^{n,m-2} \end{aligned} \tag{2.187}$$

Tento vzorec v dalším využijeme při úpravách vzorců pro derivace Hansenových koeficientů, konkrétně pro $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,l}X_k^{n,m}$ pomocí $X_k^{n,m}$, $X_k^{n,m-1}$ a $X_k^{n,m-2}$.

Důkaz (2.187): Jestliže v (2.181) zaměníme n za $n-2$:

$$(1-e^2)X_k^{n-2,m}(e) = X_k^{n-1,m} + \frac{e}{2}\left(X_k^{n+1,m+1} + X_k^{n-1,m-1}\right)$$

...a tento vztah pak dosadíme do (2.182), dostaneme:

$$\begin{aligned} k\sqrt{1-e^2}X_k^{n,m} &= m\left[X_k^{n-1,m} + \frac{e}{2}\left(X_k^{n+1,m+1} + X_k^{n-1,m-1}\right)\right] + \\ &\quad +\frac{ne}{2}\left(X_k^{n-1,m-1} - X_k^{n-1,m+1}\right) = \\ &\quad = mX_k^{n-1,m} + \\ &\quad \frac{e}{2}\left((m+n)X_k^{n+1,m+1} + +(m-n)X_k^{n-1,m-1}\right) \end{aligned}$$

Nyní rovnici vynásobíme $(1-e^2)$ a všechny tři členy vpravo rozepíšeme dle (2.181):

$$\begin{aligned} k(1-e^2)^{3/2}X_k^{n,m} &= m\left[X_k^{n,m} + \frac{e}{2}\left(X_k^{n,m+1} + X_k^{n,m-1}\right)\right] + \\ &\quad +\frac{e}{2}(m+n)\left[X_k^{n,m-1} + \frac{e}{2}\left(X_k^{n,m} + X_k^{n,m-2}\right)\right] + \\ &\quad +\frac{e}{2}(m-n)\left[X_k^{n,m+1} + \frac{e}{2}\left(X_k^{n,m+2} + X_k^{n,m}\right)\right] = \\ &= X_k^{n,m}(m + \frac{e^2}{4}(m+n) + \frac{e^2}{4}(m-n)) + \\ &\quad +X_k^{n,m+1}\frac{e}{2}(m+m-n) + \\ &\quad +X_k^{n,m-1}\frac{e}{2}(m+m+n) + \\ &\quad +X_k^{n,m+2}\frac{e^2}{4}(m-n) \\ &\quad +X_k^{n,m+2}\frac{e^2}{4}(m+n) \quad . \end{aligned}$$

2.12.2 Vzorce pro derivace Hansenových koeficientů

Derivujme podle e:

$$(\frac{r}{a})^n \exp \mathrm{i}\, mv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^{n,m}\, \mathrm{i}\, kl \qquad (2.188)$$

Budeme však muset nejprve provést jisté přípravné práce. Pro derivaci $\frac{\partial}{\partial e}$ při konstantních l, g, h, I, a určeme nejprve:

$$\frac{\partial}{\partial e}\frac{r}{a} = -\cos v \qquad (2.189)$$

Důkaz (2.189):

$$\frac{\partial}{\partial e}\frac{r}{a} = \frac{\partial}{\partial e}(1 - e\cos u) = -\cos u + e\sin u\frac{\partial u}{\partial e} \qquad (2.190)$$

Nyní dle derivace Keplerovy rovnice ($u - e\sin u = l$) zjistíme vztah pro $\frac{\partial u}{\partial e}$:

$$\frac{\partial u}{\partial e} - \sin u - e\cos u\frac{\partial u}{\partial e} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial e}(1 - e\cos u) = \sin u \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\sin u}{(1 - e\cos u)}$$

A tedy po dosazení do (2.190) dostáváme:

$$\frac{\partial u}{\partial e}\frac{r}{a} = -\cos u + e\sin u\frac{\sin u}{1 - \cos u} = \frac{-\cos u + e\cos^2 u + e\sin^2 u}{1 - e\cos u} =$$

$$= \frac{e - \cos u}{1 - e\cos u} = -\cos v \qquad (2.191)$$

Víme totiž, že:

$$r\cos v = a(\cos u - e) \Rightarrow \cos v = \frac{a(\cos u - e)}{a(1 - \cos u)} \qquad (2.192)$$

Dále dokážeme:

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \sin v(\frac{a}{r} + \frac{1}{1 - e^2}) \qquad (2.193)$$

Důkaz:

Vyjdeme při něm z (2.192), kde výchozí vztah zderivujeme podle e a využijeme rovnosti $e\sin v = a\sin u\sqrt{1 - e^2}$, vztahu (2.189) a vztahu pro $\frac{\partial u}{\partial e}$:

$$\frac{\partial r}{\partial e}\cos v - r\sin v\frac{\partial v}{\partial e} = -a\sin u\frac{\partial u}{\partial e} - a \Rightarrow$$

$$r\sin v\frac{\partial v}{\partial e} = -a\cos v\cos v + a\sin u\frac{\sin u}{1 - e\cos u} + a =$$

$$= a\sin^2 v + \frac{a^2\sin^2 u(1 - e^2)}{a(1 - e^2)}\frac{1}{1 - e\cos u} = a\sin^2 v + \frac{r^2\sin^2 v}{(1 - e^2)r} =$$

$$= \sin^2 v(a + \frac{r}{1 - e^2})$$

$$\text{Odkud již zřejmě} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial e} = \sin v(\frac{a}{r} + \frac{1}{1 - e^2}) \qquad (2.194)$$

Nyní se tedy již můžeme věnovat derivaci původní rovnice (2.188):

$$\left[n(\frac{r}{a})^{n-1}\frac{\partial}{\partial e}(\frac{r}{a})+(\frac{r}{a})^{n}\,\mathrm{i}\,m\frac{\partial v}{\partial e}\right]\exp\mathrm{i}\,mv=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial e}X_k^{n,m}\exp\mathrm{i}\,kl$$

Dosadíme do ní z (2.189) a (2.193) a opět zapíšeme siny a cosiny v exponenciálním tvaru:

$$-n(\frac{r}{a})^{n-1}\frac{1}{2}\left[\exp\mathrm{i}(m+1)v+\exp\mathrm{i}(m-1)v\right]+(\frac{r}{a})^{n}\,\mathrm{i}\,m(\frac{a}{r}+$$
$$+\frac{1}{1-e^2})\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left[\exp\mathrm{i}(m+1)v-\exp\mathrm{i}(m-1)v\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial e}X_k^{n,m}\exp\mathrm{i}\,kl \quad (2.195)$$

V levé straně rovnice dosadíme dle původní rovnice (2.188) a srovnáme členy u $\exp\mathrm{i}\,kl$:

$$-\frac{1}{2}nX_k^{n-1,m+1}-\frac{1}{2}mX_k^{n-1,m+1}-\frac{1}{2}mX_k^{n-1,m-1}+\frac{1}{2}m\frac{1}{1-e^2}X_k^{n,m+1}-$$
$$-\frac{1}{2}m\frac{1}{1-e^2}X_k^{n,m-1}=\frac{\partial}{\partial e}X_k^{n,m}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,e}X_k^{n,m}(e)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,e}X_k^{n,m}(e)=\frac{m}{1-e^2}\frac{1}{2}\left[X_k^{n,m+1}-X_k^{n,m-1}\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\left[(n-m)X_k^{n-1,m-1}+(n+m)X_k^{n-1,m-1}\right]$$

Do poslední hranaté závorky dosadíme nyní ze vzorce (2.181) a obě strany rovnice násobíme $2(1-e^2)$:

$$2(1-e^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,e}X_k^{n,m}(e)=m\left[X_k^{n,m+1}-X_k^{n,m-1}\right]-$$
$$\{(n-m)\left[X_k^{n,m+1}+\frac{e}{2}(X_k^{n,m+2}+X_k^{n,m})\right]+$$
$$+(n+m)\left[X_k^{n,m-1}+\frac{e}{2}(X_k^{n,m}+X_k^{n,m-2})\right]\}$$

Pokračujme v úpravách:

$$2(1-e^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,e}X_k^{n,m}=-neX_k^{n,m}-(n-2m)X_k^{n,m+1}-(n+2m)X_k^{n,m-1}-$$
$$-\frac{e}{2}\left[(n-m)X_k^{n,m+2}+(n+m)X^{n,m-2}\right] \quad (2.196)$$

Pomocí (2.187) se nyní zbavíme $X_k^{n,m+1}$ a $X_k^{n,m+2}$, protože:

$$\frac{e}{2}(2m-n)X_k^{n,m+1}+\frac{e^2}{4}(m-n)X_k^{n,m+2}=k(1-e^2)^{3/2}X_k^{n,m}-$$
$$-m(1+\frac{e^2}{2})X_k^{n,m}-\frac{e}{2}(2m+n)X_k^{n,m-1}-\frac{e^2}{4}(m+n)X_k^{n,m-2} \quad (2.197)$$

Členy v rovnici (2.196) napřed přeuspořádáme a vynásobíme e:

$$\begin{aligned}2e(1-e^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,e}X_k^{n,m} = -ne^2X_k^{n,m} - (n+2m)eX_k^{n,m-1} - \\ -\frac{e^2}{2}(n+m)X^{n,m-2} \\ +2\left[\frac{e}{2}(2m-n)X_k^{n,m+1} + \frac{e^2}{4}(n-m)X_k^{n,m+2}\right]\end{aligned}$$

Za poslední hranatou závorku dosadíme z (2.197):

$$\begin{aligned}2e(1-e^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,e}X_k^{n,m} = -ne^2X_k^{n,m} - (n+2m)eX_k^{n,m-1} - \\ -\frac{e^2}{2}(n+m)X^{n,m-2} - 2k(1-e^2)^{3/2}X_k^{n,m} - -2m(1+\frac{e^2}{2})X_k^{n,m} - \\ -e(2m+n)X_k^{n,m-1} - \frac{e^2}{2}(m+n)X_k^{n,m-2}\end{aligned}$$

A konečně tedy:

$$\begin{aligned}2e(1-e^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,e}X_k^{n,m}(e) = -\left[2m + (n+m)e^2 - 2k(1-e^2)^{3/2}\right]X_k^{n,m} - \\ -2e(2m+n)X_k^{n,m-1} - e^2(m+n)X_k^{n,m-2} \quad (2.198)\end{aligned}$$

Kapitola 3

Základy teorie poruch

3.1 Oskulační elementy

Problém dvou těles je jistou idealizací reálných systémů. Vyšetřujeme-li pohyb planety nebo asteroidy okolo Slunce, musíme uvážit rušivé působení dalších planet. Protože hmotnost největší planety Jupiter je více než tisíckrát menší než hmotnost Slunce, dá se očekávat, že pokud se vyšetřovaný objekt příliš nepřiblíží Jupiteru, bude rušení malé. Potom nebude nerozumné popisovat stav systému tzv. *oskulačními elementy*. Obecně jsou oskulační elementy v daném okamžiku rovny elementům problému dvou těles, které bychom v tomto okamžiku připsali polohovému vektoru $\vec{r}$ a vektoru $\dot{\vec{r}}$, kdybychom poruchu neuvažovali. Pokud jde o elementy, které jsou v problému dvou těles konstantní, pak odpovídající oskulační element pro daný okamžik je element dráhy, po které by se těleso nadále pohybovalo, kdybychom v tento okamžik poruchu vypnuli.

Na tomto místě je dobré si uvědomit, že v rušeném problému dvou těles může existovat kruhová dráha (tj. koncový bod vektoru $\vec{r}$ opisuje kružnici), jejíž oskulační excentricita je stále nenulová. Např. pro sféricky symetrickou poruchu

$$V(r) = -\mu\,\varepsilon\frac{1}{r^2} \quad , \tag{3.1}$$

kde ε je malé číslo, a lagrangián $\mathcal{L}$ systému včetně poruchy

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{k\,\mu}{r} + \mu\,\varepsilon\frac{1}{r^2} \quad , \tag{3.2}$$

je možno nalézt ke každému poloměru r_0 kruhovou dráhu, tj. dráhu s konstantním $r = r_0$. Stačí položit $\dot{r}$ ve (2.23) rovno nule. Tedy $E = U_{\mathrm{ef}}$, což v našem případě dá

$$E = -\frac{k\,\mu}{r} - \mu\,\varepsilon\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{M^2}{\mu\,r^2} \quad . \tag{3.3}$$

Tato rovnice pro body obratu v r má mít jediné řešení r_0. Kvadratická rovnice pro r, kterou dostaneme ze (3.3), má kořeny

$$r_{1,2} = \frac{1}{2E}\left[-k\,\mu \pm \sqrt{k^2\mu^2 + 4E\left(\frac{1}{2}\frac{M^2}{\mu} - \mu\,\varepsilon\right)}\right]$$

odkud

$$r_0 = -\frac{k\,\mu}{2E} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{k\,\mu}{2r_0} \tag{3.4}$$

a

$$k^2\mu^2 + 4E\left(\frac{1}{2}\frac{M^2}{\mu} - \mu\,\varepsilon\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2\mu^2 = \frac{k\,\mu}{r_0} - \left(\frac{M^2}{\mu} - 2\mu\,\varepsilon\right)$$

$$M^2 = k\,\mu^2 r_0 + 2\mu^2\varepsilon \quad . \tag{3.5}$$

Tedy dráha začínající s $r = r_0$ a E, M danými (3.4) a (3.5) je kruhová. Protože jde o pohyb v centrálním poli, zachovává se i energie E i moment hybnosti M. Z momentu hybnosti plyne rychlost v_0 na kruhové dráze

$$\mu r_0 v_0 = \sqrt{k\mu^2 r_0 + 2\mu^2\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{k}{r_0} + \frac{2\varepsilon}{r_0^2}} \quad . \tag{3.6}$$

Jestliže nyní vypneme poruchu, ale ponecháme polohový vektor i vektor rychlosti, tedy i velikosti r_0 a v_0, potom je zřejmé, že další pohyb bude probíhat po elipse (oskulační elipsa). Rychlost v_0 je pro kruhovou dráhu pro neporušený pohyb příliš velká (při $\varepsilon > 0$) nebo příliš malá (pro $\varepsilon < 0$).

Moment hybnosti tohoto pohybu po elipse bude opět $\mu r_0 v_0$, tedy platí stále (3.5). Energie $E^{'}$ pohybu po elipse však bude

$$E^{'} = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \frac{k\,\mu}{r_0} = -\frac{1}{2}\frac{k\,\mu}{r_0} + \frac{\mu\,\varepsilon}{r_0^2} = E + \frac{\mu\,\varepsilon}{r_0^2} \quad . \tag{3.7}$$

Energii $E^{'}$ bychom mohli nazvat oskulační energií. Velká poloosa oskulační elipsy bude

$$a = -\frac{k\,\mu}{2E^{'}} = +\frac{k\,\mu}{\frac{k\,\mu}{r_0} - \frac{2\mu\,\varepsilon}{r_0^2}} \quad . \tag{3.8}$$

Pro malá ε dává linearizace (3.8)

$$a = r_0 + \frac{2\varepsilon}{k} \quad . \tag{3.9}$$

Tedy pro kladná ε je oskulační element a větší než r_0. Excentricitu určíme z (2.37)

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2E^{'}M^2}{k^2\mu^3} = 1 + \frac{2}{k^2\mu^3}\left(-\frac{1}{2}\frac{k\,\mu}{r_0} + \frac{\mu\,\varepsilon}{r_0^2}\right)(k\,\mu^2 r_0 + 2\mu^2\varepsilon) = \\ &= \frac{4\,\varepsilon^2}{k^2 r_0^2} \quad . \end{aligned}$$

Tedy

$$e = \frac{2}{k\,r_0}|\varepsilon| \quad . \tag{3.10}$$

Tento příklad kruhové dráhy s nenulovou oskulační excentricitou by měl dostatečně ilustrovat záludnosti pojmu oskulační element.

3.2 Poruchové rovnice pro Delaunayovy proměnné

Poruchu v nebeské mechanice nemusí způsobovat jen třetí těleso. U pohybu umělých družic Země je takovou poruchou odchylka gravitačního pole Země od pole hmotného bodu, resp. sféricky symetrického tělesa. Proto nejprve nebudeme poruchu V přesně specifikovat, budeme však předpokládat, že rušený pohyb dvou těles je možno popsat hamiltoniánem $\mathcal{H}$ (nadále budeme používat toto označení pro hamiltonián pro odlišení od Delaunayovy proměnné H)

$$\mathcal{H}(\vec{r},\vec{p},t) = \mathcal{H}_0(\vec{r},\vec{p}) + V(\vec{r},t) \quad , \tag{3.11}$$

kde $\vec{r}$ je relativní polohový vektor základního rušeného problému dvou těles, $\mathcal{H}_0$ je neporušený hamiltonián

$$\mathcal{H}_0(\vec{r},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - k\,\frac{\mu}{r} \tag{3.12}$$

a $V(\vec{r},t)$ je porucha. Ta může záviset na čase. Např. u pohybu asteroidy zanedbáváme její působení na dvojici Jupiter–Slunce a oběh Jupitera je předem dán. Rušení dráhy asteroidy Jupiterem musí záviset na čase, protože na něm závisí i poloha Jupitera.

Proveďme nyní kanonickou transformaci k Delaunayovým proměnným

$$\vec{r},\vec{p} \;\to\; l,g,h,L,G,H$$

tak, jak byla popsána v kapitole 2. Víme, že $\mathcal{H}_0$ vyjádřené v nových kanonických proměnných je (2.127)

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\mu^3 k^2}{2L^2} \tag{3.13}$$

a $\mathcal{H}_0$ závisí jen na L. Jak víme, polohový vektor je možno v principu vyjádřit pomocí Delaunayových elementů, protože ty musí polohový vektor plně určovat. Tedy i poruchu $V(\vec{r},t)$ je možno vyjádřit v proměnných l,g,h,L,G,H.

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^3 k^2}{2L^2} + V(l,g,h,L,G,H,t) \quad . \tag{3.14}$$

Podotkněme, že použitá symbolika je fyzikální v tom smyslu, že V označuje fyzikální veličinu — energii poruchy vyjádřenou v různých proměnných. Podobně třeba teplotu T můžeme vyjádřit jako funkci pravoúhlých souřadnic

$T(X, Y, Z)$, ale i jako funkci sférických souřadnic $T(r, \vartheta, \varphi)$. Při tomto označení, které není striktně matematicky přesné, je třeba mít na zřeteli, že matematická závislost funkce T na svých třech proměnných je v obou případech jiná. Správně bychom měli zavést nové označení pro novou funkci V' nebo T'. Pokud by hrozilo nebezpečí nedorozumění, budeme to dělat. V praxi tedy přechod od (3.11) ke (3.14) není vždy jednoduchý a např. pro poruchu od nesférického tvaru Země se při konverzi od $V(\vec{r}, t)$ k $V(l, g, h, L, G, H, t)$ objevují komplikované výrazy. Máme-li $V(l, g, h, L, G, H, t)$ určeno, potom pohybové rovnice pro Delaunayovy elementy budou opět kanonické

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \tfrac{\mu^3 k^2}{L^3} + \tfrac{\partial V}{\partial L} \quad , \quad & \dot{L} &= -\tfrac{\partial V}{\partial l} \quad , \\ \dot{g} &= \tfrac{\partial V}{G} \quad , \quad & \dot{G} &= -\tfrac{\partial V}{\partial g} \quad , \\ \dot{h} &= \tfrac{\partial V}{\partial H} \quad , \quad & \dot{H} &= -\tfrac{\partial V}{\partial h} \quad . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Vidíme, že díky poruše dojde k pomalé (V je malá porucha) změně i u elementů g, h, L, G, H, které jsou v problému dvou těles konstantní. Střední anomálie l už obecně není lineární funkcí času. Odchylka je způsobena nejen členem $\partial V\ /\partial L$, ale i časovou změnou L. Uvidíme, že pro řadu poruch dochází ke změnám jen některých elementů.

3.3 Lagrangeovy poruchové rovnice

Často se užívá soustava nekanonických elementů $\Omega, I, \omega, a, e, l$, jimiž jsou přímo určeny i souřadnice vektoru $\vec{r}$, zatímco pro soustavu $\Omega, I, \omega, a, e, t_0$ musíme k určení vektoru $\vec{r}$ doplnit čas t, ve kterém $\vec{r}$ určujeme. První soustava má pro nás tu výhodu, že transformace k Delaunayovým proměnným

$$a, e, I, \Omega, \omega, l \ \leftrightarrow\ l, g, h, L, G, H \tag{3.16}$$

Lagrangeovy poruchové rovnice

nezávisí na čase (k určení polohového vektoru $\vec{r}$ a rychlosti $\dot{\vec{r}}$ nepotřebujeme čas). Poruchové rovnice pro nekanonické elementy $\Omega, I, \omega, a, e, l$ nazýváme *Lagrangeovy poruchové rovnice*. Odvodíme je z (3.15). Ukažme nejprve obecně, jak se mění Hamiltonovy kanonické rovnice při přechodu od $2n$ kanonických souřadnic $z_1, \ldots, z_{2n}$ k novým $2n$ nekanonickým souřadnicím $Z_1, \ldots, Z_{2n}$, pokud transformace

$$Z \ = Z(z) \tag{3.17}$$

nezávisí na čase. Budeme ovšem předpokládat, že determinant matice (1.14)

$$M = \frac{\partial z}{\partial Z} \quad , \text{tj.} \quad M_{iz} = \frac{\partial z_i}{\partial Z_k} \tag{3.18}$$

je nenulový a existuje tedy inverzní transformace $z(Z)$ viz (1.29). Hamiltonovy kanonické rovnice je potom možno zapsat

$$\dot{z}_k = J_{ki} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_i} \quad . \tag{3.19}$$

Užíváme Einsteinova sumačního pravidla, tj. přes dva opakující se indexy sčítáme. Potom

$$\begin{aligned}\dot{Z}_j &= \frac{\partial Z_j}{\partial z_k}\dot{z}_k = \frac{\partial Z_j}{\partial z_k}J_{ki}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_i} = \frac{\partial Z_j}{\partial z_k}J_{ki}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_s}\frac{\partial Z_s}{\partial z_i} = \\ &= \left(M^{-1}J(M^{-1})^T\right)_{js}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_s} = \mathcal{P}_{js}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_s} \quad .\end{aligned}$$

Zde jsme užili definici Poissonovy matice (1.46). Pro nekanonické souřadnice dostáváme pohybové rovnice

$$\dot{Z}_j = (Z_j, Z_s)\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_s} \quad . \tag{3.20}$$

Protože při výpočtu dostaneme Poissonovu matici (Z_j, Z_s) jako funkci proměnných z_k, musíme ještě dosadit ze vzorce pro inverzní transformaci $z(Z)$, aby rovnice (3.20) obsahovala opravdu jen nové souřadnice.

Použijme nyní výsledek (3.20) na transformaci (3.16). Uvědomíme-li si, že

$$\begin{gathered} l = l \quad , \quad \omega = g \quad , \quad \Omega = h \quad , \quad a = \frac{L^2}{\mu^2 k} \quad , \\ e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}} \quad , \quad \cos I = \frac{H}{G} \quad , \end{gathered} \tag{3.21}$$

potom nenulové derivace $\partial Z_j/\partial z_k$ jsou tyto (pokládáme $k = n^2 a^3$ z 3.Keplerova zákona):

$$\frac{\partial l}{\partial l} = 1 \quad , \quad \frac{\partial \omega}{\partial g} = 1 \quad , \quad \frac{\partial \Omega}{\partial h} = 1 \quad ,$$

$$\frac{\partial a}{\partial L} = 2\frac{L}{\mu^2 k} = \frac{2}{\mu}\sqrt{\frac{a}{k}} = \frac{2}{\mu\, n\, a} \quad , \quad \frac{\partial e}{\partial L} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}}\frac{G^2}{L^3} = \frac{1 - e^2}{e\, \mu\, n\, a^2} \quad ,$$

$$\frac{\partial e}{\partial G} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}}\frac{G}{L^2} = -\frac{1}{e\, \mu\, n\, a^2}\sqrt{1 - e^2} \quad ,$$

$$-\sin I\, \frac{\partial I}{\partial H} = \frac{1}{G} = \frac{L}{G}\frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial I}{\partial H} = -\frac{1}{\mu\, n\, a^2}\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}\frac{1}{\sin I} \quad ,$$

$$-\sin I\, \frac{\partial I}{\partial G} = -\frac{H}{G^2} = -\frac{H}{G}\frac{L}{G}\frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial I}{\partial G} = \frac{1}{\mu\, n\, a^2}\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}\operatorname{cotg} I \quad .$$

Matice $\mathcal{P}_{js} = (Z_j, Z_s)$ je antisymetrická, proto stačí určit jen patnáct členů nad diagonálou. Díky (3.21) obsahuje každá Poissonova závorka nejvýše jeden nenulový člen. Řada závorek je rovna nule. Jediné nenulové členy jsou:

$$\begin{aligned}(a, l) = \quad & -(l, a) = -\tfrac{\partial l}{\partial l}\tfrac{\partial a}{\partial L} &&= -\frac{2}{\mu\, n\, a} \quad , \\ (e, \omega) = \quad & -(\omega, e) = -\tfrac{\partial \omega}{\partial g}\tfrac{\partial e}{\partial G} &&= \frac{1}{e\, \mu\, n\, a^2}\sqrt{1 - e^2} \quad ,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(e,l) = &\quad -(l,e) = -\tfrac{\partial l}{\partial l}\tfrac{\partial e}{\partial L} &&= -\frac{1-e^2}{e\,\mu\,n\,a^2} \quad , \\
(I,\omega) = &\quad -(\omega,I) = -\tfrac{\partial\omega}{\partial g}\tfrac{\partial I}{\partial G} &&= \frac{1}{\mu\,n\,a^2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{cotg} I \quad , \\
(I,\Omega) = &\quad -(\Omega,I) = -\tfrac{\partial\Omega}{\partial h}\tfrac{\partial I}{\partial H} &&= \frac{1}{\mu\,n\,a^2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{\sin I} \quad .
\end{aligned}
$$

Odtud pro Lagrangeovy poruchové rovnice dostaneme

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= -\frac{2}{\mu\,n\,a}\frac{\partial V}{\partial l} \quad , \\
\dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\,\mu\,n\,a^2}\frac{\partial V}{\partial\omega} - \frac{1-e^2}{e\,\mu\,n\,a^2}\frac{\partial V}{\partial l} \quad , \\
\dot{I} &= \frac{1}{\mu\,n\,a^2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{1}{\sin I}\frac{\partial V}{\partial\Omega} - \operatorname{cotg} I\,\frac{\partial V}{\partial\omega}\right) \quad , \\
\dot{\Omega} &= -\frac{1}{\mu\,n\,a^2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{\sin I}\frac{\partial V}{\partial I} \quad , \\
\dot{\omega} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\,\mu\,n\,a^2}\frac{\partial V}{\partial e} + \frac{1}{\mu\,n\,a^2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{cotg} I\,\frac{\partial V}{\partial I} \quad , \\
\dot{l} &= n + \frac{2}{\mu\,n\,a}\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{1-e^2}{e\,\mu\,n\,a^2}\frac{\partial V}{\partial e} \quad .
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Je nutné mít na zřeteli, že v těchto rovnicích je n funkcí a. V literatuře se často zavádí poruchová funkce $\mathcal{R} = -V/\mu$, potom mají rovnice (3.22) jiná znaménka.

V následujícím také k veličině $\mathcal{R}$ přejdeme... Často užívanými elementy, již konstantními v nerušeném pohybu, jsou [1] $(\omega, l) \longrightarrow (\tilde{\omega}, \varepsilon)$:

$$
\begin{aligned}
l &= nt + \varepsilon - \tilde{\omega} \qquad & \tilde{\omega} &= \omega + \Omega \\
\omega &= \tilde{\omega} - \Omega \qquad & \varepsilon &= l - nt + \omega + \Omega
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

pak

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial\Omega} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\Omega}\frac{\partial R}{\partial\Omega} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\Omega}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\Omega}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial\Omega} + \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial\varepsilon} \\
\frac{\partial R}{\partial\omega} &= \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\omega}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial\varepsilon} \\
\frac{\partial R}{\partial l} &= \frac{\partial\varepsilon}{\partial l}\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{\partial R}{\partial l} \quad .
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Po použití rovnic (3.23), (3.24) a relací

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\omega}} &= \dot{\omega} + \dot{\Omega} \quad , \\
\dot{\varepsilon} &= \dot{l} - n + \dot{\omega} + \dot{\Omega}
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

[1] Interpretace veličin $\tilde{\omega}, \varepsilon$: $\tilde{\omega}$ je délka perigea (pericentra), v čase $t = 0$ je satelit v $l(t=0) = \varepsilon - \tilde{\omega}$, tj. $\varepsilon = l(t=0) + \tilde{\omega}$. Místo ε se také někdy zavádí τ jako okamžik průchodu perigeem $l = v(t-\tau)$.

dospějeme k rovnicím[2]

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{n\,e}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \quad , \\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2 e}(1-\sqrt{1-e^2})\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2 e}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} \quad , \\
\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2}{n\,a}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{n\,a^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} \quad , \\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} \quad , \\
\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} \quad , \\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\tan\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right) - \frac{1}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad .
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Lagrangeovy poruchové rovnice (LPE) mohou býti integrovány numericky, seminumericky nebo plně analyticky.[3]

Hlavní výhody:

- Je to plně poruchová metoda šitá na Keplerovskou elipsu — obchází v integrovaných rovnicích centrální člen od problému dvou těles. (Jsou i jiné formulace, kdy fundamentální drahou není Keplerovská elipsa, ale jiná intermediální dráha → Garfinkel a J_2 problém, Hillova intermediální dráha.)
- Pro malé poruchy jsou změny elementů malé, lze tedy použít velký integrační krok (daleko větší než při přímé integraci Newtonových rovnic).
- Integrace bezprostředně představuje změny keplerovských elementů → jasně interpretovatelné (máme pro ně dobrou intuici).

Nevýhody:

- Pravé strany LPE jsou daleko komplikovanější než u Newtonových rovnic (navíc je obvykle velice obtížné vyjádřit $R(a, e, \ldots)$)), i to že některé proměnné jsou tam ve velkém množství sinů a kosinů → numericky náročné.
- LPE jsou singulární pro $e \to 0, I \to 0$.
- Nejsou přímo aplikovatelné na parabolickou dráhu (ani hyperbolickou) → silné pertubace, kdy se může měnit typ dráhy nelze dobře popisovat.
- Je třeba řešit Keplerovu rovnici (ještě k numerickým zátěžím).

[2] Ještě jsme přešli k $\varepsilon \to \varepsilon^I$, $\dot{\varepsilon}^I = \dot{\varepsilon} + t\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$, což má báječné vlastnosti vzhledem k charakteru rozvoje poruchové funkce R.

[3] Poincarého důkaz o tom, že množina parametrů, kde formální řešení divergují, je hustá.

Nevýhoda uvedená ve druhém bodě je seriózní, neboť se jedná o častý případ.[4] Obecně lze však tyto potíže obejít transformací $(e, \tilde{\omega}, i, \Omega) \to (h, k, p, q)$:

$$\begin{array}{lll} h = e\sin\tilde{\omega} & k = e\cos\tilde{\omega} & e^2 = h^2 + k^2 \\ \mathrm{tg}\,\tilde{\omega} = \frac{h}{k} & p = \sin i \sin\Omega & q = \sin i \cos\Omega \\ \mathrm{tg}\,\Omega = \frac{p}{q} & \cos I = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} & . \end{array} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\sin\tilde{\omega} + e\cos\tilde{\omega}\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\cos\tilde{\omega} - e\sin\tilde{\omega}\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\partial R}{\partial h} &= \frac{\partial e}{\partial h}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial h}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} \\ \frac{\partial e}{\partial h} &= \frac{1}{e}h = \sin\tilde{\omega} \\ \frac{\partial e}{\partial k} &= \frac{1}{e}k = \cos\tilde{\omega} \end{aligned}$$

Tj.

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{\cos^2\tilde{\omega}}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial h} = \frac{1}{k} & \Rightarrow & \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial h} = \frac{1}{e}\cos\tilde{\omega} \\ \frac{1}{\cos^2\tilde{\omega}}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k} = -\frac{h}{k^2} & \Rightarrow & \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k} = -\frac{1}{e}\sin\tilde{\omega} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial h} &= \frac{\partial R}{\partial e}\sin\tilde{\omega} + \frac{1}{e}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\cos\tilde{\omega} \\ \frac{\partial R}{\partial k} &= \frac{\partial R}{\partial e}\cos\tilde{\omega} - \frac{1}{e}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega} \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \sin\tilde{\omega}\dot{e} + e\cos\tilde{\omega}\dot{\tilde{\omega}} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)\frac{1}{e}\sin\tilde{\omega}\,\partial_\varepsilon R - \\ &- \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2 e}\sin\tilde{\omega}\,\partial_{\tilde{\omega}} R + \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2}\cos\tilde{\omega}\,\partial_e R + \\ &+ \frac{\tan\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}} e\cos\tilde{\omega}\,\partial_i R = \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2}\partial_k R - \frac{h\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2(1+\sqrt{1-e^2}\,)}\partial_\varepsilon R + \frac{k\ \tan\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}\partial_i R \end{aligned} \tag{3.29}$$

[4] Zajímavé však je, že předchozí formulace byla Leverierrem úspěšně použita pro velké planety Sluneční soustavy: když i, e malé, neboť např. $\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}$ je vždy $\sim e$, pak vypadly divergující členy.

neboť

$$\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e^2} = \frac{(1-\sqrt{1-e^2}\,)(1+\sqrt{1-e^2}\,)}{e^2(1+\sqrt{1-e^2}\,)} = \frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}} \quad .$$

Podobně

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} &= \cos\tilde{\omega}\,\dot{e} - e\sin\dot{\tilde{\omega}}\,\dot{\tilde{\omega}} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2}\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e^2} e\cos\tilde{\omega}\,\partial_\varepsilon R - \\
&- \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2}\frac{1}{e}\cos\tilde{\omega}\,\partial_{\tilde{\omega}} R - \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2}\sin\tilde{\omega}\,\partial_e R - \\
&- \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}} e\sin\tilde{\omega}\,\partial_i R = \\
&= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2}\,\partial_h R - \frac{k\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}\,\partial_\varepsilon R - \frac{h\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}\,\partial_i R \quad .
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Analogicky, ale malinko pracněji, obdržíme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}\,\cos^3 i}\,\partial_q R - \frac{p}{2n\,a^2\sqrt{1-e^2}\,\cos i\cos^2\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\right), \\
\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}\,\cos^3 i}\,\partial_p R - \frac{q}{2n\,a^2\sqrt{1-e^2}\,\cos i\cos^2\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\right),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

kde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos i} &= \sqrt{1+p^2+q^2} \quad , \quad \frac{1}{2\cos^2\frac{i}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \\
\operatorname{tg}\frac{i}{2} &= \frac{\sin\frac{i}{2}}{\cos\frac{i}{2}} = \frac{\sin i}{2\cos^2\frac{i}{2}} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{1+\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad ,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

nevýhodou jsou složité výrazy.

Ne vždy se stane, že poruchu lze vyjádřit pomocí potenciálu R (např. atmosféra, tlak záření, ...), pak musíme pracovat s poruchovými zrychleními rozloženými do nějakého systému. Používá se

- R — složka ve směru radius vektor,
- S — kolmá k R v dráze satelitu ve směru narůstání anomálií,
- W — kolmá k dráze satelitu uzavírající na pravoúhlý systém.

Označíme ψ délku v dráze, Z kolmé souřadnice k dráze satelitu.

$$R = \frac{\partial R}{\partial r} \quad , \quad S = \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial\psi} \quad , \quad W = \frac{\partial R}{\partial Z} \tag{3.33}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(Re\sin v \ + \frac{p}{r}S\ \right)\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a}\left(R\sin v \ + S(\cos E+\cos v)\right)\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{W\,r\cos(\tilde{\omega}-\Omega+v)}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{W\,r\sin(\tilde{\omega}-\Omega+v)}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i}\\
\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a\,e}\left[-R\cos v \ + S\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\ \right]+2\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\sin^2\frac{i}{2}\\
\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} &= \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t}+2\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{i}{2}-\frac{2rR}{n\,a^2}
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Kapitola 4

Popis gravitačního pole

4.1 Gravitační potenciál

Chceme-li vyšetřovat pohyb družice v gravitačním poli Země užitím poruchové metody, musíme nejprve umět vyjádřit potenciální energii systému jako funkci složek polohového vektoru $\vec{r}$ od Země k družici a složek jeho rychlosti a času. Odtud teprve můžeme určit tvar poruchy $V(\vec{r}, t)$ a tuto poruchu vyjádřit pomocí elementů $a, e, I, \Omega, \omega, l$. To umožní určit pravé strany Lagrangeových poruchových rovnic a jejich řešení pak udává vývoj elementů družice. Protože mezi elementy $a, e, I, \Omega, \omega, l$ a Delaunayovými proměnnými platí prosté vztahy (3.21), umožňuje znalost tvaru poruchy $V(a, e, I, \Omega, \omega, l, t)$ zapsat ihned i poruchové rovnice v Delaunayových elementech.

Tento plán tedy bydeme mít na zřeteli, když budeme popisovat gravitační pole Země. Postup je možno ovšem použít i na další tělesa. Mějme tedy nepravidelné těleso o hmotnosti m (opět označíme $\mathcal{G}m = k$) a hmotný bod (družici) o hmotnosti μ a polohovém vektoru $\vec{r}$. Potenciální energie systému je dána součtem potenciálních energií Newtonovy gravitační interakce přes všechny elementární hmoty.

$$U(\vec{r}) = -\mathcal{G}\mu \int\limits_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, \mathrm{d}V' \quad , \tag{4.1}$$

kde $\rho(\vec{r}')$ je hustota tělesa v místě o polohovém vektoru $\vec{r}'$ a integruje se přes objem tělesa. Přitom $\mathrm{d}V' = \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y'\, \mathrm{d}z'$. Často se zavádí gravitační potenciál $\mathcal{V}(\vec{r})$ jako funkce polohového vektoru udávající záporně vzatou potenciální energii jednotkové hmoty umístěné v bodě $\vec{r}$

$$\mathcal{V}(\vec{r}) = \mathcal{G} \int\limits_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, \mathrm{d}V' \quad . \tag{4.2}$$

Gravitační potenciál $\mathcal{V}(\vec{r})$ splňuje vně tělesa Laplaceovu rovnici

$$\Delta\mathcal{V} = 0 \quad , \tag{4.3}$$

kde Δ je Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad , \tag{4.4}$$

jak se snadno přesvědčíme dosazením (4.2) do (4.3). Předpokládáme-li izolovaný systém, platí

$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{V}(\vec{r}) = 0 \quad , \tag{4.5}$$

protože velikost $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ je při volbě dostatečně velkého r možno omezit shora libovolně malou konstantou. V příští kapitole ukážeme, že funkce splňující (4.3) a (4.5) mají speciální tvar.

Připomeňme ještě, že ve sférických souřadnicích $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $r\cos\varphi$ má Laplaceova rovnice tvar

$$\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial\varphi^2}\right]\right\} = 0\,. \tag{4.6}$$

Úhlová část Laplaceova operátoru

$$\bigwedge = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{4.7}$$

může sloužit k definici sférických funkcí, které budeme nadále hodně využívat.

4.2 Sférické a s nimi spojené speciální funkce

Definujme sférické funkce $Y_n(\vartheta,\varphi)$ jako na povrchu jednotkové koule všude regulární a jednoznačné vlastní funkce diferenciálního operátoru $\bigwedge$ (4.7) příslušné k vlastním číslům $[-n(n+1)]$, kde n je přirozené číslo. Platí tedy

$$\bigwedge Y_n(\vartheta,\varphi) = -n(n+1)Y_n(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{4.8}$$

Hledáme-li řešení (4.8) ve tvaru

$$Y_n(\vartheta,\varphi) = \Phi(\varphi)\,\Xi(\vartheta) \quad , \tag{4.9}$$

dostaneme dosazením do (4.8) a po vydělení $Y_n(\vartheta,\varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Xi(\vartheta)}\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\Xi(\vartheta) \quad + \quad \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Phi(\varphi) &= \\ = \quad -n(n+1) \quad . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Má-li tato rovnice platit identicky, musí být čast závislá jen na φ konstantní. Konstantu označíme $-k^2$

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Phi(\varphi) = -k^2 \quad . \tag{4.11}$$

Aby řešení $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\varphi}$ a $e^{-\mathrm{i}\,k\varphi}$ vedlo k jednoznačnému řešení na kouli, musí pro všechna φ platit

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad , \tag{4.12}$$

a tedy k musí být celé číslo. To ospravedlňuje i volbu záporné konstanty vpravo ve (4.11). Při kladném znaménku u k^2 ve (4.11) by řešení $\mathrm{e}^{k\varphi}$, $\mathrm{e}^{-k\varphi}$ nesplňovala (4.12). Ze (4.10) potom dostaneme

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\Xi(\vartheta)\right) = \left[\frac{k^2}{\sin^2\vartheta} - n(n+1)\right]\Xi(\vartheta)\ . \tag{4.13}$$

Zavedeme-li

$$x = \cos\vartheta \quad , \tag{4.14}$$

dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Xi}{\mathrm{d}x}\right] + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2}\right]\Xi = 0 \quad . \tag{4.15}$$

To je známá rovnice pro přidružené Legendrovy funkce $P_n^k(x)$. Připomeňme některé vlastnosti těchto funkcí a jjejich speciálního případu pro $k = 0$, kdy přecházejí v tzv. *Legendrovy polynomy.*

Legendrovy polynomy

Rovnice pro Legendrovy polynomy plyne ze (4.15) při $k = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Xi}{\mathrm{d}x}\right] + n(n+1)\Xi = 0 \tag{4.16}$$

řešením této rovnice jsou (pro n rovno celému číslu) Legendrovy polynomy, které je možno definovat tzv. *Rodriguesovým vzorcem*

Rodriguesův vzorec

$$\Xi(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \quad . \tag{4.17}$$

Rozvinneme-li $(x^2 - 1)$ podle binomické věty ($[n/2]$ bude celá část z $n/2$)

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2^n\,n!}\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x^{2n-2j}\,(-1)^j\right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^j}{2^n}\frac{(2n-2j)!}{(n-2j)!\,j!\,(n-j)!}x^{n-2j} \quad , \end{aligned} \tag{4.18}$$

pak se můžeme snadno přesvědčit dosazením (4.18) do (4.16) a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x, že P_n je opravdu řešením (4.16). Uveďme několik prvních Legendrových polynomů

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \quad , \\ P_1(x) &= x \quad , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \quad , \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3) \quad , \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \quad .
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Důležitou vlastností Legendrových polynomů je skutečnost, že tvoří úplný ortogonální systém v prostoru L_2 kvadraticky integrovatelných funkcí v intervalu $< -1, 1 >$. Platí totiž

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

a každou funkci $f(x)$, pro kterou existuje integrál

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x \quad ,$$

lze rozložit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \quad .$$

Přitom koeficienty a_n jsou dány vztahem

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x \quad .$$

Někdy se Legendrovy polynomy definují pomocí vytvořující funkce. Platí

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\alpha^n \quad , \tag{4.20}$$

jak se můžeme přesvědčit použitím binomické formule nejprve na funkci $[1 - 2\alpha(x-\alpha/2]^{-1/2}$ a potom na člen $(x-\alpha/2)^j$. Řada (4.20) konverguje pro $-1 \leq x \leq 1$ absolutně pro všechna $|\alpha| < 1$.

Vraťme se nyní k řešení rovnice (4.15). Položme pro $k \geq 0$

$$\Xi(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} u(x) \quad , \tag{4.21}$$

potom pro $u(x)$ dostaneme rovnici

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - 2x(k+1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + [n(n+1) - k(k+1)]\, u = 0 \quad . \tag{4.22}$$

Derivací (4.22) podle x snadno zjistíme, že jestliže nějaká funkce u splňuje (4.22), pak $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ splňuje tutéž rovnici (4.22), kde však k nahradíme $(k+1)$.

Jestliže tedy $P_n(x)$ splňuje (4.22) pro $k = 0$, potom $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_n$ splňuje (4.22) s $k = 1$ atd. Partikulární řešení rovnice (4.22) tedy je

$$u(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_n(x) \quad . \tag{4.23}$$

Proto můžeme pro každé celé $n \geq 0$, $k \geq 0$ definovat Legendrovu přidruženou funkci

$$P_n^k(x) = (1 - x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_n(x) \quad , \tag{4.24}$$

která je řešením (4.15) pro $k \geq 0$. Pro $k < 0$ je řešením $P_n^{|k|}(x)$. Vidíme, že přidružené Legendrovy funkce jsou nenulové pouze pro $|k| \leq n$. Tím jsme pro každé nezáporné celé n našli $2n + 1$ řešení rovnice (4.8). Označíme tato řešení $Y_{nk}(\vartheta, \varphi)$, kde $k = -n, -n + 1, \ldots, 0, 1, \ldots, n$

$$Y_{nk}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{\frac{|k|+k}{2}} \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|k|)!}{(n+|k|)!} \right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\varphi}\, P_n^{|k|}(\cos\vartheta) \quad . \tag{4.25}$$

Tyto funkce nazýváme *sférické funkce*, někdy jen sférické harmoniky. Tvoří ortonormální systém na jednotkové kouli. Sférické funkce

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{nk}^*(\vartheta, \varphi)\, Y_{mj}(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi = \delta_{nm} \delta_{kj} \quad , \tag{4.26}$$

kde * označuje komplexní sdružení. Při důkazu (4.26) je možno využít ortogonality Legendrových funkcí se stejným $k \geq 0$

$$\int_{-1}^{1} P_n^k(x)\, P_m^k(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \delta_{nm} \quad . \tag{4.27}$$

Vztah mezi Y_{nk} a $Y_{n,-k}$ je

$$Y_{n,-k}(\vartheta, \varphi) = (-1)^k\, Y_{nk}^*(\vartheta, \varphi) \quad . \tag{4.28}$$

Důležitou vlastností ortogonálního systému $Y_{nk}(\vartheta, \varphi)$ je jeho úplnost na množině funkcí kvadraticky integrovatelných na kouli. Jinými slovy, každou funkci $f(\vartheta, \varphi)$, pro kterou existuje konečný integrál

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |f(\vartheta, \varphi)|^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \quad ,$$

je možno rozvinout v konvergentní řadu

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_{nk} Y_{nk}(\vartheta, \varphi) \quad , \tag{4.29}$$

s koeficienty a_{nk} danými vztahem

$$a_{nk} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y^*_{nk}(\vartheta,\varphi)\, f(\vartheta,\varphi)\, \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \quad , \tag{4.30}$$

což plyne ze (4.26). Uveďme některé ze sférických funkcí s malými indexy

$$\begin{aligned}
Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ,\\
Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\vartheta \quad ,\\
Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) &= \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\vartheta\; \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\varphi} \quad ,\\
Y_{2,0}(\vartheta,\varphi) &= \left(\frac{5}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right) \quad ,\\
Y_{2,\pm1}(\vartheta,\varphi) &= \mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta\; \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\varphi} \quad ,\\
Y_{2,\pm2}(\vartheta,\varphi) &= \frac{1}{4}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2\vartheta\; \mathrm{e}^{\pm2\,\mathrm{i}\,\varphi} \quad ,\\
Y_{3,0}(\vartheta,\varphi) &= \left(\frac{7}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2}\cos^3\vartheta - \frac{3}{2}\cos\vartheta\right) \quad ,\\
Y_{3,\pm1}(\vartheta,\varphi) &= \mp\frac{1}{4}\left(\frac{21}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\vartheta(5\cos^2\vartheta - 1)\, \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\varphi} \quad ,\\
Y_{3,\pm2}(\vartheta,\varphi) &= \frac{1}{4}\left(\frac{105}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^2\vartheta\cos\vartheta\; \mathrm{e}^{\pm2\,\mathrm{i}\,\varphi} \quad ,\\
Y_{3,\pm3}(\vartheta,\varphi) &= \mp\frac{1}{4}\left(\frac{35}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^3\vartheta\; \mathrm{e}^{\pm3\,\mathrm{i}\,\varphi} \quad .
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Připomeňme ještě tzv. aditivní formuli pro sférické funkce, která dává do vztahu sférické funkce pro dva směry prostoru ϑ,φ a ϑ',φ' s Legendrovým polynomem $P_n(\cos\gamma)$, kde γ je úhel sevřený těmito dvěma směry. Ze sférické kosinové věty platí

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi') \quad . \tag{4.32}$$

Aditivní formule tvrdí

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{4\pi}{2n+1} Y_{nk}(\vartheta,\varphi)\, Y^*_{nk}(\vartheta',\varphi') \quad , \tag{4.33}$$

resp. pro Legendrovy přidružené funkce

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\delta_{k0}+1}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\, P_n^{(k)}(\cos\vartheta)\, P_n^{(k)}(\cos\vartheta') \times$$

$$\times \quad \cos\bigl(k(\varphi-\varphi')\bigr) \quad . \tag{4.34}$$

4.3 Řešení Dirichletovy úlohy pro sféru

Nejprve se budeme zabývat vnější Dirichletovou úlohou. Nechť na kulové ploše S se středem O a poloměrem $\overline{R}$ je zadána funkce $f(\vartheta,\varphi)$. Předpokládáme, že obvyklé sférické souřadnice r,ϑ,φ máme zavedeny v nějakém systému $\mathcal{S}=[0,x,y,z]$. Hledáme funkci $\mathcal{V}(r,\vartheta,\varphi)$, harmonickou vně této koule (tj. splňující rovnici $\Delta\mathcal{V}=0$), pro kterou platí

$$\mathcal{V}(\overline{R},\vartheta,\varphi)=f(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{4.35}$$

Dále budeme požadovat, aby hledaná funkce $\mathcal{V}(r,\vartheta,\varphi)$ splňovala rovnici (4.5). Na každé kulové ploše o poloměru r můžeme hledanou funkci $\mathcal{V}(r,\vartheta,\varphi)$ rozložit podle ortonormálního systému sférických funkcí (4.25). Koeficienty budou ovšem záviset na r

$$\mathcal{V}(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} a_{nk}(r)\,Y_{nk}(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{4.36}$$

Podmínka harmoničnosti je potom podle (4.6) a (4.7)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\wedge\mathcal{V}=0 \quad .$$

Po dosazení ze (4.36) s uvážením vlastnosti sférických funkcí (4.8)

$$\wedge Y_{nk}(\vartheta,\varphi)=-n(n+1)\,Y_{nk}(\vartheta,\varphi) \quad , \tag{4.37}$$

dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}a_{nk}\right)-n(n+1)a_{nk}\right]Y_{nk}(\vartheta,\varphi)=0 \quad , \tag{4.38}$$

odtud např. vynásobením $Y^*_{ms}(\vartheta,\varphi)$ a integrací přes sféru

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,r^2}a_{ms}+2r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}a_{ms}-m(m+1)a_{ms}=0 \quad . \tag{4.39}$$

Řešení lineární diferenciální rovnice 2.řádu můžeme hledat ve tvaru

$$a_{ms}(r)=r^N \quad ,$$

odkud pro N dostaneme podmínku

$$N(N+1)=m(m+1) \quad .$$

Řešením jsou tedy dvě možná N

$$\begin{aligned} N &= m \quad , \\ N &= -(m+1) \quad . \end{aligned}$$

Obecné řešení (4.39) obsahuje dvě integrační konstanty

$$a_{ms}(r) = A_{ms} r^m + B_{ms} \frac{1}{r^{m+1}} \quad . \tag{4.40}$$

Má-li však funkce (4.34) splňovat podmínku (4.5), musíme položit $A_{ms} = 0$. Potom

$$\mathcal{V}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} B_{nk} \frac{1}{r^{n+1}} Y_{nk}(\vartheta, \varphi) \quad . \tag{4.41}$$

Rozložíme-li funkce $f(\vartheta, \varphi)$ podle sférických funkcí

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} F_{nk} Y_{nk}(\vartheta, \varphi) \quad , \tag{4.42}$$

potom vidíme, že podmínka (4.35) bude splněna pouze, položíme-li ve (4.41)

$$B_{nk} = \overline{R}^{n+1} F_{nk} \quad .$$

Řešením Dirichletovy vnější úlohy pro sféru je tedy funkce

$$\mathcal{V}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} F_{nk} \left(\frac{\overline{R}}{r} \right)^{n+1} Y_{nk}(\vartheta, \varphi) \quad , \tag{4.43}$$

kde F_{nk} jsou koeficienty rozkladu $f(\vartheta, \varphi)$ podle sférických funkcí. Je-li funkce $f(\vartheta, \varphi)$ reálná, potom $f(\vartheta, \varphi) = f^*(\vartheta, \varphi)$ a tedy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} F_{nk} Y_{nk}(\vartheta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} F^*_{nk} Y^*_{nk}(\vartheta, \varphi) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} F^*_{nk} (-1)^k Y_{n,-k}(\vartheta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k'=-n}^{n} F^*_{n,-k'} (-1)^{k'} Y_{nk}(\vartheta, \varphi) \quad , \end{aligned}$$

odtud musí platit

$$F_{nk} = (-1)^k F^*_{n,-k} \quad . \tag{4.44}$$

Potom však snadno vidíme, že i funkce $\mathcal{V}(r, \vartheta, \varphi)$ je reálná.

Vnitřní Dirichletova úloha naopak vyžaduje nalézt funkci $\mathcal{V}(r, \vartheta, \varphi)$ harmonickou uvnitř kulové plochy S, která splňuje na hranici opět podmínku (4.35). Tentokrát však požadujeme, aby funkce $\mathcal{V}(r, \vartheta, \varphi)$ byla regulární v počátku ($r = 0$). Postupujeme stejně jako u vnější úlohy, v rovnici (4.40) jsme však tentokrát nuceni položit $B_{ms} = 0$. Srovnáním (4.42) s řešením

$$\mathcal{V}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} A_{nk} r^n Y_{nk}(\vartheta, \varphi) \tag{4.45}$$

dostaneme požadavek

$$A_{nk} = \frac{F_{nk}}{\overline{R}^n}$$

a řešení

$$\mathcal{V}(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} F_{nk} \left(\frac{r}{\overline{R}}\right)^n Y_{nk}(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{4.46}$$

Všimněme si, že v obou případech (4.43) i (4.46) dostáváme řady, které jsou řadou (4.42) (která je absolutně konvergentní) majorizovány, tedy obě řady též absolutně konvergují.

Rovnice (4.43) musí dávat obecný tvar pro gravitační potenciál Země (nebo jiného tělesa) vně sféry, která Zemi obklopuje. Konstanty F_{nk} charakterizují gravitační pole Země, ale stále ještě závisí na soustavě souřadnic. Jestliže místo soustavy $\mathcal{S} = [0,x,y,z]$ zvolíme $\mathcal{S}' = [0,x',y',z']$, ve které jsou opět vztahy $x' = r'\sin\vartheta'\cos\varphi'$, $y' = r'\sin\vartheta'\sin\varphi'$, $z' = r'\cos\vartheta'$ zavedeny sférické souřadnice r',ϑ',φ', potom i v čárkované soustavě musí platit Laplaceova rovnice (díky invariantnosti Laplaceova operátoru). Stejná argumentace, která vedla k výrazu (4.43) pro gravitační potenciál Země, dává

$$\mathcal{V}(r',\vartheta',\varphi') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m'=-n}^{n} F^{'}_{nm'} \left(\frac{\overline{R}}{r'}\right)^{n+1} Y_{nm'}(\vartheta',\varphi') \quad . \tag{4.47}$$

Koeficienty rozvoje téhož potenciálu však budou v nové soustavě jiné.

Vezmeme-li funkci $\mathcal{V}(r,\vartheta,\varphi) = (R/r)^{j+1}Y_{jm}(\vartheta,\varphi)$, potom v soustavě $\mathcal{S}'$ bude mít tato funkce opět tvar (4.47). Protože $r = r'$, můžeme porovnat koeficienty u stejných mocnin r a vidíme, že nenulové mohou být jen koeficienty $K^{'}_{nm'}$ s $n = j$. Sférická funkce v soustavě $\mathcal{S}$ je lineární kombinací sférických funkcí se stejným prvním indexem

$$Y_{jm}(\vartheta,\varphi) = \sum_{m'=-j}^{j} D^j_{m'm} Y_{jm'}(\vartheta',\varphi') \quad . \tag{4.48}$$

Do koeficientů v této lineární kombinaci jsme zavedli i index m, neboť koeficient $F^{'}_{jm'}$ v (4.47) musí záviset i na hodnotě m v rovnici $\mathcal{V} = (R/r)^{j+1}Y_{jm}(\vartheta,\varphi)$. Koeficienty $D^j_{m'm}$ závisí pouze na vzájemném otočení soustav $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$. Jestliže toto natočení budeme charakterizovat Eulerovými úhly ψ,θ,ϕ (budou přesně zavedeny v kapitole 4.4), potom důležitým úkolem bude určit závislost transformačních koeficientů $D^j_{m'm}$ na ψ,θ,ϕ. To provedeme v příští kapitole.

4.4 Eulerovy úhly

Mějme soustavu $\mathcal{S} = [0,x,y,z]$ a otočenou soustavu $\mathcal{S}' = [0,x',y',z']$. Soustavu $\mathcal{S}$ můžeme ztotožnit se soustavoou $\mathcal{S}'$, provedeme-li postupně tři otočení:

1. Otočení okolo osy z o úhel ψ (precesní úhel).
   Tím vznikne nová soustava $[0,\xi,\eta,\zeta]$. Úhel ψ volíme tak, aby osa ξ ležela v přímce, ve které rovina x,y protíná rovinu x',y'. Přitom ze dvou možných směrů osy ξ volíme směr $\vec{l_3} \times \vec{l_3}''$, kde $\vec{l_3}$ je jednotkový vektor ve směru osy z, $\vec{l_3}''$ jednotkový vektor ve směru osy z'.

2. Otočení okolo nové osy ξ o úhel θ (nutační úhel).
   Tímto otočením vznikne soustava $[0,\xi',\eta',\zeta']$. Úhel θ volíme tak, aby osa ζ přešla v osu z'.

3. Otočení okolo osy ζ' o úhel ϕ (úhel vlastní rotace).
   Tímto otočením přejde $[0,\xi',\eta',\zeta']$ v $[0,x',y',z']$. Úhel tedy musíme volit tak, aby osa ξ' přešla v x'.

Možné hodnoty Eulerových úhlů jsou omezeny takto:

$$0 \le \psi \le 2\pi \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi \quad , \quad 0 \le \phi \le 2\pi \quad . \tag{4.49}$$

Matici $\mathcal{R}(\psi,\theta,\phi)$ transformace od sloupcového vektoru

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ke sloupcovému vektoru} \quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

dostaneme podobně jako matici (2.77) v kapitole 2, kde jsou též definovány matice $\mathcal{R}_3, \mathcal{R}_1$.

$$\vec{x} = \mathcal{R}_3(\psi)\,\mathcal{R}_1(\theta)\,\mathcal{R}_3(\phi)\,\vec{x}\,' \quad ,$$

tedy

$$\vec{x}\,' = \mathcal{R}_3(-\phi)\,\mathcal{R}_1(-\theta)\,\mathcal{R}_3(-\psi)\,\vec{x} = \mathcal{R}'(\psi,\theta,\phi)\,\vec{x} \quad . \tag{4.50}$$

Srovnáním s výrazem (2.77) pro $\mathcal{R}(I,\Omega,\omega)$ vidíme, že $\mathcal{R}'$ dostaneme z $\mathcal{R}$ dosadíme-li $\Omega = -\phi$, $I = -\theta$, $\omega = -\psi$.

$$\mathcal{R}'(\psi,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \quad .$$

Maticový element $\mathcal{R}_{ik}$ je kosinus úhlu mezi i-tou novou a j-tou starou osou.

4.5 Stokesovy konstanty

Gravitační potenciál tělesa můžeme pomocí (4.43) přepsat

$$\mathcal{V}(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}m\,\frac{R^n}{r^{n+1}}\,\tilde{K}_{nk} Y_{nk}(\vartheta,\varphi) \quad . \tag{4.51}$$

Přepis (4.43) do (4.51) je čistě formální záležitost $\mathcal{G}$ je gravitační konstanta a m hmotnost tělesa, R je charakteristický rozměr tělesa. Jeho hodnota je pro dané těleso konvenční dohodnuté číslo. Zavádíme ho proto, aby konstanty $\tilde{K}_{nk}$ byly bezrozměrné. Opět platí podmínka reality

$$\tilde{K}_{n,-k} = (-1)^k \tilde{K}^*_{nk} \quad . \tag{4.52}$$

Sečteme-li v (4.51) vždy členy s k a $-k$, můžeme gravitační potenciál vyjádřit v reálném tvaru

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(r,\vartheta,\varphi) &= \mathcal{G}m\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\delta_{k0}}\frac{R^n}{r^{n+1}}\Big(\tilde{K}_{nk}Y_{nk}(\vartheta,\varphi)+\tilde{K}_{n,-k}Y_{n,-k}(\vartheta,\varphi)\Big)=\\ &= \mathcal{G}m\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{1+\delta_{k0}}\frac{R^n}{r^{n+1}}\,\Re\Big[\tilde{K}_{nk}Y_{nk}(\vartheta,\varphi)\Big]\quad ,\end{aligned}$$

kde $\Re$ označuje reálnou část (imaginární část budeme označovat $\Im$). S využitím definice sférických funkcí (4.25) dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(r,\vartheta,\varphi) &= \mathcal{G}m\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{R^n}{r^{n+1}}P_n^{(k)}(\cos\vartheta)\Big[\tilde{C}_{nk}\cos(k\varphi)+\\ &+ \tilde{S}_{nk}\sin(k\varphi)\Big]\quad . \end{aligned}\tag{4.53}$$

Vztah mezi komplexními veličinami $\tilde{K}_{nk}$ a reálnými veličinami $\tilde{C}_{nk}, \tilde{S}_{nk}$ je potom

$$\tilde{K}_{nk}=(-1)^k(1+\delta_{k0})\left[\frac{\pi(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\right]^{\frac{1}{2}}(\tilde{C}_{nk}-\mathrm{i}\,\tilde{S}_{nk})\tag{4.54}$$

pro $k>0$. Ujasněme si nyní vztahy mezi $\tilde{K}_{nk}$ (resp. $\tilde{C}_{nk}$ a $\tilde{S}_{nk}$) a ***průběhem hustoty v tělese***. Protože hustota $\rho(\vec{r}\,')$ v tělese plně určuje jeho vnější gravitační pole (4.2), musí být možno konstanty $\tilde{K}_{nk}$ určit ze znalosti hustoty. Dosadíme do vzorce (4.2)

Průběh hustoty v tělese

Kapitola 5

Pohyb družice v gravitačním poli

5.1 Vyjádření poruchy. Funkce sklonu.

Gravitační potenciál Země ve sférických souřadnicích v soustavě $\mathcal{S} \equiv [T; x, y, z]$ pevně spojené se Zemí je možno zapsat ve tvaru (4.51)

$$\vartheta(r, \upsilon, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} G m_{\oplus} \frac{R_{\oplus}^{n}}{r^{n+1}} K_{nk} Y_{nk}(\vartheta, \varphi) \quad . \tag{5.1}$$

Budeme předpokládat, že T je těžiště Země, osa x směřuje ke greenwichskému poledníku a leží spolu s osou y v rovině rovníku. Člen s $n = 0$ dává $Gm_{\oplus}/r$, zatímco členy s $n = 1$ vymizí díky volbě počátku v těžišti. Zavedeme-li hmotnost družice m_d a

$$\mu = \frac{m_d \, m_{\oplus}}{m_d + m_{\oplus}} \quad , \quad m = m_d + m_{\oplus} \quad , \tag{5.2}$$

potom energie problému je vyjádřena pomocí hamiltoniánu vzájemného pohybu (v něm je odseparována těžišťová část)

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} - G\frac{\mu \, m}{r} + V \quad , \tag{5.3}$$

kde porucha

$$V = -\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} G \, \frac{R_{\oplus}^{n} \, \mu \, m}{r^{n+1}} \, K_{nk} \, Y_{nk} \, (\vartheta, \varphi) \quad . \tag{5.4}$$

Základní část H tvoří neporušený hamiltonián H_0 problému dvou těles

$$H_0 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} - G\frac{\mu \, m}{r} \quad . \tag{5.5}$$

Obrázek 5.1: Souřadné systémy při transformaci poruchové funkce. Osa X soustavy S směřuje k jarnímu bodu, osa x soustavy $\mathcal{S}$ směřuje na greenwichský poledník a osa x' soustavy $\mathcal{S}'$ na družici D.

Při zavedení Delaunayových nebo Keplerových proměnných bude

$$H_0 = -\frac{\mu^3 G^2 m^2}{2L^2} \quad \text{resp.} \quad H_0 = -\frac{G\mu\, m}{2a} \quad . \tag{5.6}$$

Úkolem zůstává určit závislost V na těchto proměnných. Na obr.(5.1) je v místě D zakreslena družice a některé její oskulační elementy. Fixní soustava, jejíž osy se prakticky neotáčejí, je reprezentována systémem $S \equiv [T, X, Y, Z]$, kde X, Y leží opět v rovině zemského rovníku, ale X směřuje stále k jarnímu bodu. Úhel $\tau = \angle xTX$ je hodinový úhel jarního bodu pro greenwichský poledník, nebo-li greenwichský hvězdný čas, který je ovšem díky rotaci Země lineární funkcí času

$$\tau = \tau_0 + Nt \quad . \tag{5.7}$$

Proveďme nyní se soustavou $\mathcal{S}$ otočení s Eulerovými úhly

$$\begin{aligned} \psi &= h - \tau \\ \theta &= I \\ \phi &= v + g \quad . \end{aligned}$$

Nová soustava $\mathcal{S}' = [T; x', y', z']$ má osu x' směřující k družici D. Proto sférické souřadnice družice D v S' jsou $\vartheta' = \frac{\pi}{2}$, $\varphi' = 0$. Transformační rovnice pro sférické funkce při rotaci je

$$Y_{nk}(\vartheta, \varphi) = \sum_{k'=-n}^{n} Y_{nk} \quad , \quad (\frac{\pi}{2}, 0)\, D^{(n)}(h - \tau, I, v + g)_{k'k} \quad . \tag{5.8}$$

Pro tzv. Wignerův koeficient $D^{(n)}_{k'k}$ máme

$$D^{(n)}(h-\tau, I, v+g)_{k'k} = \mathrm{i}^{k'-k}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k(h-\tau)+k'(v+g)]}\ \Delta^{(n)}_{k'k}(I) \quad , \tag{5.9}$$

kde $\Delta^{(n)}_{k'k}(I)$ je známá funkce I. Určeme dále $Y_{n,k}(\frac{\pi}{2}, 0)$.

$$Y_{n,k}(\frac{\pi}{2}, 0) = (-1)^{\frac{k+|k|}{2}} \left[\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|k|)!}{(n+|k|)!}\right]^{1/2} P^{|k|}_n(0) \quad .$$

Podle(4.24) dostaneme užitím (4.18)

$$P^k_n(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^j}{2^n\, j!}\frac{(2n-2j)!}{(n-j)!(n-2j-k)!}\, x^{n-2j-k} \quad .$$

Odtud okamžitě vidíme, že pro $n-k$ liché je $P^k_n(0)=0$. Pro sudé $n-k=2j$ je

$$P^k_n(0) = \frac{(-1)^j}{2^n j!}\frac{(2n-2j)!}{(n-j)!(n-2j-k)!} = \frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}}{2^n}\frac{(n+k)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\ \left(\frac{n+k}{2}\right)!} \quad .$$

Zavedeme-li funkci $P(n,k)$ definovanou na množině dvojic celých čísel tak, že

$$\begin{aligned} P(n,k) &= 1 \quad , \quad \text{je-li} \quad n-k \quad \text{sudé,} \\ P(n,k) &= 0 \quad , \quad \text{je-li} \quad n-k \quad \text{liché, potom} \\ P^k_n(0) &= P(n,k)(-1)^{\frac{n-k}{2}}\frac{(n+k)!}{2^n\left(\frac{n+k}{2}\right)!\ \left(\frac{n-k}{2}\right)!} \quad . \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dosazení do (5.8)

$$\begin{aligned} Y_{n,k}(\vartheta,\varphi) &= \sum_{k'=-n}^{n} (-1)^{\frac{k'+|k'|}{2}} \left[\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|k'|)!}{(n+|k'|)!}\right]^{1/2} \times \\ &\times\ P(n,k')\,(-1)^{\frac{n-|k'|}{2}}\ \frac{(n+|k'|)!}{2^n\left(\frac{n+|k'|}{2}\right)!\ \left(\frac{n-|k'|}{2}\right)!}\ \mathrm{i}^{k'-k} \times \\ &\times\ \Delta^{(n)}_{k'k}(I)\ \exp \mathrm{i}[k'(v+g)+k(h-\tau)] = \\ &= \sum_{k'=-n}^{n} (-1)^{\frac{k'+n}{2}}\ \mathrm{i}^{k'k}\ \Delta^{(0)}_{k'k}(I)\ \times \\ &\times\ \frac{\left[\frac{2n+1}{4\pi}(n-|k'|)!\,(n+|k'|)!\right]^{\frac{1}{2}}}{2^n\left(\frac{n+|k'|}{2}\right)!\ \left(\frac{n-|k'|}{2}\right)!} \times \\ &\times\ P(n,k')\ \exp \mathrm{i}[k'(v+g)+k(h-\tau)] \quad . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Vidíme, že při vynechání absolutních hodnot u k' se díky symetrii zlomku hodnota výrazu nezmění. Zavedeme-li dále místo k'

$$2p = n-k' \quad (\text{potom} \quad k' = n-2p) \quad ,$$

můžeme sčítat jen přes $p = 0, 1...n$. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} Y_{nk}(\vartheta,\varphi) &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\,\mathrm{i}^{n-2p-k}\;\Delta^{(n)}_{n-2p,k}(I)\,\frac{\left[\frac{2n+1}{4\pi}\,(2p)!\,(2n-2p)!\right]^{\frac{1}{2}}}{2^n\,p!\,(n-p)!}\;\times \\ &\times\quad \exp\mathrm{i}[(n-2p)(g+v)+k(h-\tau)]\quad . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Definujeme-li veličinu se třemi indexy $F_{nkp}(I)$, která nazývá v literatuře funkcí sklonu, vztahem

$$\begin{aligned} F_{nkp}(I) &= (-\mathrm{i})^{n-k}\,\frac{1}{2^n\,p!\,(n-p)!}\,\left[(2p)!\,(2n-2p)!\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\right]^{\frac{1}{2}}\times \\ &\times\quad \Delta^{(n)}_{n-2p\;k}(I)\quad , \end{aligned} \tag{5.13}$$

potom

$$\begin{aligned} Y_{nk}(\vartheta,\varphi) &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^k\,\left[\frac{2n+1}{4\pi}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right]^{\frac{1}{2}}\,F_{nkp}(I)\times \\ &\times\quad \exp\mathrm{i}[(n-2p)(g+v)+k(h-\tau)]\quad . \end{aligned} \tag{5.14}$$

Většinou využíváme jen funkcí F_{nkp} se všemi indexy kladnými. Potom (5.14) můžeme přepsat $(k > 0)$

$$P_n^k(\cos\vartheta)\,e^{\mathrm{i}\,k\varphi} = \sum_{p=0}^{n} F_{nkp}(I)\;\exp\mathrm{i}[(n-2p)(g+v)+k(h-\tau)]\quad . \tag{5.15}$$

Funkci sklonu zavedl vztahem (5.15) Allan (Proceedings of the Royal Society, A, 288 (1965), 60). Z výrazu pro matice $\Delta^{(j)}$ dostaneme pomocí (5.13)výraz pro $F_{nkp}(I)$.

$$\begin{aligned} F_{nkp} &= (-\mathrm{i})^{n-k}\,\frac{(n+k)!\,(2n-2p)!\,(2p)!}{2^n\,p!\,(n-p)!}\,\sum_{\kappa}(-1)^{\kappa}\times \\ &\times\quad \frac{1}{(2p-\kappa)!\,(n+k-\kappa)!\,\kappa!\,(\kappa+n-2p-k)!}\times \\ &\times\quad c^{n+k+2p-2\kappa}\;s^{2\kappa+n-2p-k}\quad , \end{aligned} \tag{5.16}$$

kde $c = \cos\frac{I}{2}$, $s = \sin\frac{I}{2}$. Častěji se v literatuře najde výraz, který získáme z (5.16) změnou indexu κ na

$$\begin{aligned} \kappa &= \sigma - n + 2p + k \\ F_{nkp} &= \mathrm{i}^{n-k}\,\frac{(n+k)!}{2^n\,p!\,(n-p)!}\,\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}\binom{2n-2p}{\sigma}\binom{2p}{n-k-\sigma}\times \\ &\times\quad c^{3n-k-2p-2\sigma}\;s^{k-n+2p+2\sigma}\quad . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Vidíme, že Allanova funkce sklonu je pro sudé $n-k$ reálnou funkcí, pro liché $n-k$ ryze imaginární. Proto se někdy používá Kaulových funkcí sklonu $\overline{F}_{nkp}$, které jsou reálné. Souvislost mezi oběma funkcemi je dána vztahem

$$Fnkp(I) = \left\{ \begin{array}{c} \overline{F}_{nkp} \\ -\mathrm{i}\,\overline{F}_{nkp} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{lll} \text{pro} & n-k & \text{sudé} \\ \text{pro} & n-k & \text{liché} \end{array} \quad . \tag{5.18}$$

Uveďme si některé z funkcí sklonu pro $n=2$ a $n=3$.

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{200} &= -\frac{3}{8}\sin^2 I \quad , \\
\overline{F}_{201} &= \frac{3}{4}\sin^2 I - \frac{1}{2} \quad , \\
\overline{F}_{202} &= -\frac{3}{8}\sin^2 I \quad , \\
\overline{F}_{210} &= \frac{3}{4}\sin I(1+\cos I) \quad , \\
\overline{F}_{211} &= -\frac{3}{2}\sin I\cos I \quad , \\
\overline{F}_{212} &= -\frac{3}{4}\sin I(1-\cos I) \quad , \\
\overline{F}_{220} &= \frac{3}{4}(1+\cos I)^2 \quad , \\
\overline{F}_{221} &= \frac{3}{2}\sin^2 I \quad , \\
\overline{F}_{222} &= \frac{3}{4}(1-\cos I)^2 \quad , \\
\overline{F}_{300} &= -\frac{5}{16}\sin^3 I \quad , \\
\overline{F}_{301} &= -\frac{15}{16}\sin^3 I + \frac{3}{4}\sin I \quad , \\
\overline{F}_{302} &= -\frac{15}{16}\sin^3 I + \frac{3}{4}\sin I \quad , \\
\overline{F}_{303} &= \frac{5}{16}\sin^3 I \quad , \\
\overline{F}_{310} &= -\frac{15}{16}\sin^2 I(1+\cos I) \quad , \\
\overline{F}_{311} &= \frac{15}{16}\sin^2 I(1+3\cos I) - \frac{3}{4}(1+cosI) \quad , \\
\overline{F}_{312} &= \frac{15}{16}\sin^2 I(1-3\cos I) - \frac{3}{4}(1-\cos I) \quad , \\
\overline{F}_{313} &= -\frac{15}{16}\sin^2 I(1-\cos I) \quad , \\
\overline{F}_{320} &= \frac{15}{8}\sin I(1+\cos I)^2 \quad , \\
\overline{F}_{321} &= \frac{15}{8}\sin I(1-2\cos I-3\cos^2 I) \quad ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{322} &= -\frac{15}{8}\sin I(1+2\cos I-3\cos^2 I) \quad , \\
\overline{F}_{323} &= -\frac{15}{8}\sin I(1-\cos I)^2 \quad , \\
\overline{F}_{330} &= \frac{15}{8}(1+\cos I)^3 \quad , \\
\overline{F}_{331} &= \frac{45}{8}\sin^2 I(1+\cos I) \quad , \\
\overline{F}_{332} &= \frac{45}{8}\sin^2 I(1-\cos I) \quad , \\
\overline{F}_{333} &= \frac{15}{8}(1-\cos I)^3 \quad .
\end{aligned}
$$

Neuvádíme funkce F_{nkp} s $n = 1$, protože tyto členy v poruše vypadnou díky volbě počátku soustavy v těžišti Země. Členy s vyšším n mají obecně (nejde-li o případ rezonance) menší důležitost, neboť u příslušného F_{nkp} stojí poměr $(R_\oplus/r)^n$. Užijeme-li sčítacího schématu

$$
\sum_{k=-n}^{n} a_{nk} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\delta_{ko}+1}\,(a_{n,k}+a_{n,-k})
$$

na vzorec (5.4), dostaneme

$$
V = -\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\delta_{ko}+1}\, G\,\frac{R_\oplus^n \mu m}{r^{n+1}}\,(K_{n,k}Y_{n,k}+K_{n,-k}Y_{n,-k}) \quad .
$$

Ze vztahů $Y_{n,-k} = (-1)^k Y^*_{n,k}, K_{n,-k} = (-1)^k K^*_{n,k}$, můžeme dále upravit V na funkci sférických harmonik pouze s kladným k

$$
V = -\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\delta_{ko}+1}\, G\,\frac{R_\oplus^n \mu m}{r^{n+1}}\,\Re[K_{nk}Y_{nk}(\vartheta,\varphi)] \quad . \qquad (5.19)
$$

Užitím (5.14) dostaneme dále

$$
\begin{aligned}
V &= -\Re\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} \frac{2}{\delta_{ko}+1}\, G\,\frac{R_\oplus^n \mu m}{r^{n+1}}\, K_{nk}\,(-1)^k \;\times \\
&\times \left[\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right]^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \; F_{nkp}(I)\; \exp i[(n-2p)(g+v)+k(h-\tau)] \quad . \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

Zavedení reálných Stokesových konstant (4.54) vede na

$$
\begin{aligned}
V &= -\Re\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} G\,\frac{R_\oplus^n \mu m}{r^{n+1}}\, F_{nkp}(I) \times \\
&\times \; [(C_{nk}\cos d + S_{nk}\sin d) + \mathrm{i}(C_{nk}\sin d - S_{nk}\cos d) \quad , \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

kde jsme označili

$$d = (n-2p)(g+v) + k(h-\tau) = (n-2p)(\omega+v) + k(\Omega-\tau) \quad . \qquad (5.22)$$

Při určení reálné části na pravé straně v (5.21) je třeba uvážit, že pro $n-k$ liché je $F_{nkp}(I)$ ryze imaginární. Proto po zavedení reálné funkce sklonu $\overline{F}_{nkp}(I)$ ze(5.18) plyne z (5.21)

$$\begin{aligned} V &= -\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} G\,\frac{R_{\oplus}^{n}\mu m}{r^{n+1}}\,\overline{F}_{nkp}(I) \times \\ &\times \left[\begin{pmatrix} C_{nk} \\ -S_{nk}\end{pmatrix}\cos d + \begin{pmatrix} S_{nk} \\ C_{nk}\end{pmatrix}\sin d\right] \quad , \end{aligned} \qquad (5.23)$$

kde vrchní varianta platí pro $n-k$ sudé a spodní pro $n-k$ liché.

Tímto postupem se nám v poruše V objevují funkce sklonu, jejím argumentem je sklon dráhy družice. Keplerovské elementy se ovšem mění podle Lagrangeových rovnic (3.22). Abychom mohli tyto rovnice použít, musíme v (5.23) *odtransformovat* ke Keplerovským elementům ještě faktor $\frac{1}{r^{l+1}}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}[(l-2p)(\omega+v)+m(\Omega-\tau)]$, kde figurují dvě nekeplerovské veličiny r, v; podle (2.179) víme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^{l+1}}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}[(l-2p)(\omega+v)+m(\Omega-\tau)] = \frac{1}{a^{l+1}} \times \\ \times \quad & \sum_q X_{l-2p+q}^{-(l+1),l-2p}(e)\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}[(l-2p+q)l + (l-2p)\omega + m(\Omega-\tau)] = \\ \overset{\text{(Kaula)}}{\equiv} \quad & \frac{1}{a^{l+1}}\sum_q G_{lpq}(e)\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}[(l-2p)\omega + (l-2p+q)l + m(\Omega-\tau)] \end{aligned}$$

$$\Big(tj. \quad G_{lpq}(e) = X_{l-2p+q}^{-(l+1),l-2p}(e)\Big) \quad .$$

Cayley (1861) podal tabulky $G_{lpq}(e)$, resp. $X_k^{l,m}(e)$ do vysokého řádu v e. Dostáváme se tedy k finálnímu vyjádření poruchové funkce podle Kauly

$$\begin{aligned} V &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} V_{ml} \\ V_{ml} &= -G\mu m\,\frac{R_{\oplus}}{a^{l+1}}\sum_{p=0}^{l} F_{lmp}(I)\sum_q G_{lpq}(e)\,S_{lmpq}(\omega,\Omega,l,\tau) \\ S_{lmpq}(\omega,\Omega,l,\tau) &= \begin{bmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm}\end{bmatrix}\cos d_{lmpq}(\omega,\Omega,l,\tau) + \begin{bmatrix} S_{lm} \\ C_{lm}\end{bmatrix}\sin d_{lmpq}(\omega,\Omega,l,\tau) \\ d_{lmpq}(\omega,\Omega,l,\tau) &= (l-2p)\omega + (l-2p+q)l + m(\Omega-\tau) \quad . \end{aligned}$$

Nyní využijeme faktu,že člen J_2(resp.J_{20}) značně dominuje v rozvoji poruch gravitačního potenciálu (odpovídá zemskému splöštění). Jemu přísluší

$$\begin{aligned} V_{20} &= G\mu \frac{m}{a}\left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 J_2 \times \\ &\times \sum_{p=0}^{2}\sum_q \overline{F}_{20p}(I)\, G_{2pq}(e)\, \cos[(2-2p)\omega + (2-2p+q)l] \quad . \end{aligned}$$

Členy závislé na rychlé proměnné l představují oscilace kolem střední hodnoty $\overline{V}_{20}$, zajímá-li nás vývoj systému po čas značně delší než je perioda l ($\sim \frac{1}{n}$), pak intuitivně chápeme, že střední vývoj poruch bude vystižen členem $\overline{V}_{20}$ (tento postup se dá počítat i exaktními metodami poruchového počtu, takže tato je správná).

$$\overline{V}_{20} = -G\mu\frac{m}{a}\left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 J_2 \sum_{p=0}^{2} \overline{F}_{20p}(I)\, \underbrace{G_{2p(2p-2)}}_{X_0^{-3,2-2p}}(e)\, \cos[(2-2p)\omega \quad .$$

Nyní dokážeme, že $X_0^{-3,\pm 2}(e) = 0$.

$$\begin{aligned} X_0^{-3,2}(e) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2v, \mathrm{d}\, l \overset{\text{Kep. rov.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\, u \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos 2v = \\ \sin v &= \frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}\, \sin u \quad , \\ \cos v\, \mathrm{d}\, v &= \sqrt{1-e^2}\, \frac{\cos u\,(1-e\cos u) - e\sin^2 u}{(1-e\cos u)^2}\, \mathrm{d}\, u = \\ &= \sqrt{1-e^2}\, \left(\frac{a}{r}\right)^2 (\cos u - e)\, \mathrm{d}\, u = \\ &= \sqrt{1-e^2}\, \left(\frac{a}{r}\right) \cos v\, \mathrm{d}\, u \\ \mathrm{d}\, u &= (1-e^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{a}\right) \mathrm{d}\, v \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\, v\, (1-e^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{r}\right) \cos 2v = \\ &= \frac{(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\, \vartheta \left(\frac{a}{r}\right) \cos 2\vartheta = 0 \;(= X_0^{-3,-2}) \quad . \end{aligned}$$

Zbývá už jen spočítat $X_0^{3,0}$

$$X_0^{3,0}(e) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \mathrm{d}\, l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \mathrm{d}\, u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\, u}{(1-e\cos u)^2}$$

komplexní triky nám pomohou spočítat tento integrál záměnou $z = e^{\mathrm{i}\,u}$, $\mathrm{d}\,z = \mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}\,u}$, $\mathrm{d}\,u = \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{i}\,z}$, tedy

$$
\begin{aligned}
X_0^{3,0}(l) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{i}\,z \left(1 - e\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{|z|=1} \frac{4z\,\mathrm{d}\,z}{(2z - ez^2 - e)^2} = \\
&= \frac{2}{\pi\,\mathrm{i}\,e^2} \int\limits_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}\,z}{(z^2 - \frac{2}{e}z + 1)^2} = \frac{2}{\pi\,\mathrm{i}\,e^2} \int\limits_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}\,z}{(z-z_1)^2\,(z-z_2)^2} \quad ,
\end{aligned}
$$

kde

$$
z_{1,2} = \frac{\frac{2}{e} \pm \sqrt{\frac{4}{e^2} - 4}}{2} = \frac{1}{e} \pm \sqrt{\frac{1}{e^2} - 1} \quad ,
$$

oba kořeny jsou reálné (neboť $e < 0$), jeden (z_1) je vně jednotkového kruhu a jeden kořen ($z_2 = \frac{1}{e} - \sqrt{\frac{1}{e^2} - 1} = \frac{1}{e}(1 - \sqrt{1-e^2}\,) = \frac{e^2}{e(1+\sqrt{1-e^2})} = \beta$) je vždy uvnitř jednotkového kruhu; tj.

$$
\begin{aligned}
X_0^{3,0}(e) &= \frac{2}{\pi e^2\,\mathrm{i}} 2\pi\,\mathrm{i}\; res_\beta \left[\frac{z}{(z-z_1)^2\,(z-z_2)^2}\right] = \frac{4}{e^2}\left[\frac{z}{(z-z_1)^2}\right]'_\beta = \\
&= -\frac{4}{e^2}\left[\frac{z+z_1}{(z-z_1)^3}\right]_\beta = -\frac{4}{e^2}\,\frac{\frac{2}{e}}{-8\left(\frac{1}{e^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{e^3}\,\frac{e^3}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \quad ,
\end{aligned}
$$

tedy celkově ve $\overline{V}_{20}$ zůstane jen

$$
\overline{V}_{20} = -G\mu m\,\frac{J_2}{2a}\left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\sin^2 I - 1\right) \quad . \tag{5.24}
$$

Dosazením tohoto členu do Lagrangeových rovnic získáme

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= 0 \quad , \quad \dot{e} = 0 \quad , \quad \dot{I} = 0 \\
\dot{\Omega} &= \frac{3nJ_2}{2(1-e^2)^2}\left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 \cos I \\
\dot{\omega} &= \frac{3nJ_2}{4(1-e^2)^2}\left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 (1 - 5\cos^2 I) \\
\dot{l} &= n - \frac{3nJ_2}{4(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 (3\cos^2 I - 1) \quad ,
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

pro konkrétní hodnoty $J_2 \doteq -0.0010827$, $e = 0.01$, $a = 1.12R_\oplus$ je

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega} &= 3.55(5\cos^2 I - 1) \quad {}^\circ(\mathrm{den})^{-1} \\
\dot{\Omega} &= -6.7\cos I \quad {}^\circ(\mathrm{den})^{-1} \\
\dot{l} &= [14.37 + 0.0093(3\cos^2 I - 1)] \quad \text{oběh}(\mathrm{den})^{-1} \quad ,
\end{aligned}
$$

neboť na pravých stranách (5.25) jsou konstantní veličiny v daném přiblížení,je řešení

$$a = a_0, \quad e = e_0, \quad I = I_0, \quad \Omega = \dot{\Omega}_0 t + \Omega_0, \quad \omega = \dot{\omega}_0 t + \omega_0, \quad l = \dot{l}_0 t + l_0 \quad .$$

Uvědomme si však, že jsme v našem řešení udělali značně nelimitní přechod. Při hledání středního vývoje poruch jsme místo vyřešení exaktních rovnic a vystředování tohoto řešení, vystředovali poruchu a řešili rovnice s vystředovanou poruchou s vírou, že oba přístupy povedou ke stejnému výsledku. To zdaleka nemusí být pravda. V případě *hlavního problému* se však tato dá zlepšit von Zeipelovou nebo Lie-Hoviho metodou. Vychází však najevo, že v okolí $I \simeq I_a$ (pro něž $\cos I_a = \frac{1}{\sqrt{5}}, I_a \simeq 63.4°$) tato intuitivní představa neplatí (při započtení ostatních členů geopotenciálu přistupují další komplikace s rezonancemi).

Tím, že se dá náš předchozí postup zpřesnit, myslíme fakt, že se dá exaktně matematicky ukázat, že řešení mají tvar např. $\Omega(t) = \Omega_{\text{naše aprox.}}(t) +$ (period. členy v l); samozřejmě ty periodické členy v l v řešení při středování vypadnou. Háček je však v tom, že při $I \Rightarrow I_a$ koeficienty v těchto periodických členech divergují a kolem I_a má tedy obecné řešení $\Omega(t)$ jiný tvar než bylo naznačeno.

Zkusme se v tomto okolí rozebrat více kvantitativně. Mimochodem si okamžitě povšimneme, že pro $I = I_a$ je $\dot{\omega}_{\text{naše aprox.}} = 0$. Z důvodů výše naznačených nelze přijmout za dobrý postup, kdy poruchu vystředujeme (tak jsme dostali (5.24)) a pak řešíme poruchové rovnice. My bychom měli vzít přesné řešení a to pak středovat přes l, dá se však exaktně zkonstruovat *střední exaktní hamiltonián* (von Zeipelovou metodou, Lie-Hoviho metodou,...), který vede právě na výsledky totožné s vystředováním přesného řešení problému. Ten hamiltonián vypadá

$$\begin{aligned}
\overline{V}_{20}^{(ex)} &= \overbrace{\frac{1}{4} G\mu m \frac{J_2}{R_\oplus} \left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^3 (1-e^2)^{\frac{-3}{2}} (3\cos^2 I - 1)}^{\text{náš } \textit{tesařský} \text{ odhad}} - \\
&- \frac{3}{64} G\mu m \frac{J_2^2}{R_\oplus} \left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^5 e^2 (1-e^2)^{\frac{-3}{2}} \sin^2 I \times \\
&\times (15\cos^2 I - 1)\cos 2\omega + o(J_2^3) \quad , \qquad (5.26)
\end{aligned}$$

(chybí zde ještě nějaké členy sekulární $\sim J_2^2$, ale ty nejsou důležité pro další vyšetřování). Dá se tedy dokázat, že žádaný hamiltonián, který exatně popisuje střední vývoj elementů, nezávisí na Ω (což je intuitivně přijatelné, neboť jde o problém s axiální symetrií). Pak je Ω cyklickou souřadnicí a $H \simeq \sqrt{1-e^2}\cos I$ musí být konstantou, tj. $\frac{\mathrm{d}\,e}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{(1-e^2)}{e} \operatorname{tg} I \frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,t}$. Dosazení do Lagrangeových rovnic poskytuje

$$\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{3}{32} n J_2^2 \left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^4 e^2 (1-e^2)^4 \sin i \cos i (15\cos^2 i - 1)\sin 2\omega \qquad (5.27)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 (1-e^2)^{-2} (5\cos^2 i - 1) + o(J_2^2) \quad , \qquad (5.28)$$

tedy

$$\ddot{\omega} = \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial i}\frac{di}{dt} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega}\dot{\omega} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial l}\dot{l}$$

a vyjádřením $\ddot{\omega}$ máme

$$\ddot{\omega} \simeq -\frac{9}{40} n^2 J_2^3 \left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^6 e^2 \left(1-e^2\right)^{-6} \sin 2\omega = -\frac{K^2}{2}\sin 2\omega \quad ,$$

to je rovnice matematického kyvadla o níž víme, že kromě cilkurační oblasti ve fázovém prostoru řešení má i librační oblast. Librační perioda ω je $\sim J_2^{-3/2}$. Z rovnice (5.28) je vidět, že mimo oblast kritického sklonu ω cirkuluje s periodou $\sim J_2^{-1}$. Perioda změn ω v oblasti kritického sklonu tedy vzroste faktorem $\sim J_2^{-1/2} \simeq 30$. Podobně se dá ukázat, že amplitudy změn (i, e) vzrostou tímtéž faktorem.

Velmi složitá je otázka fyzikálního původu efektu kritického sklonu? Jsme zvyklí, že v takových situacích je existence rezonancí klíčem k vysvětlení problému (např. rezonance v asteroidálním pásu). Nikoliv řídké byly však také názory, že jde čistě o singularitu matematické metody používané při řešení. Historie tohoto tématu je značně propletená. Začíná pravděpodobně u série článků Browera, Garfinkela a Kozaie (1959), kteří von Zeipelovou metodou odseparovali rychlou proměnnou. Transformace se ukázala singulární pro $I \simeq I_a$. Zpočátku měli "navrch" lidé, kteří zastávali názor, že jde jen o matematickou singularitu použité metody (dělali numerické experimenty). Později se ukázalo, že časové škály po nichž sledovali oskulační elementy byly příliš malé a pozdější numerické testy potvrdily názor, že jde o podstatnou singularitu problému.