STAVBA A VÝVOJ HVĚZD

Petr Harmanec
Astronomický ústav Univerzity Karlovy

23. května 2001

1 Úvodem

Po dlouhou dobu zůstávala otázka fyziků a astrofyziků, proč hvězdy vydrží bez viditelné změny zářit tak dlouho, nezodpovězena. Ještě v 19. století existovaly úvahy o tom, zda je možné, aby Slunce získávalo svou zářivou energii chemickými reakcemi, tedy spalováním tuhých či tekutých látek. Názor, že to není pravděpodobné, vyslovil již John Herschel. Lékař J.R. Mayer uvažoval r. 1846 o tom, že by Slunce mohlo získávat energii dopadem meteoritů. Bylo ale odhadnuto, že by k dosažení potřebného zářivého výkonu muselo na Slunce každou sekundu dopadat 2.10^{12} tun hmoty a takový přírůstek hmoty by se musel měřitelně projevit na změně drah planet. H. von Helmholtz roku 1854 odhadl, že i při nejenergetičtějším spalování vodíku a kyslíku na vodu by Slunce při své hmotnosti vydrželo svítit pouze málo přes 3000 let. Přišel místo toho s hypotézou, že Slunce září díky uvolňování energie gravitačním smršťováním. To by zajistilo zářivou stabilitu na nějakých 40 miliónů let. Nicméně zlepšující se odhady stáří Země vyloučily i tuto možnost, třebaže – jak uvidíme – se gravitační kontrakce v určitých stádiích hvězdného vývoje skutečně významně uplatňuje. Teprve koncem třicátých let dvacátého století byl nalezen hlavní zdroj stabilního záření hvězd: jaderná syntéza prvků, zejména slučování vodíku na helium – viz např. Weizsäcker (1937), Bethe a Critchfield (1938) a Bethe (1939). Tím byla otevřena cesta ke konstrukci realistických modelů stavby a vývoje hvězd.

Je třeba si uvědomit, že téměř celá dosavadní teorie stavby a vývoje hvězd je vybudována a propočtena za pomoci jednorozměrných modelů sféricky symetrických hvězd. Toto zjednodušení má své oprávnění. Ukazuje se totiž, že hmota hvězd má vysoký stupeň koncentrace směrem ke středu. Všechny stavové veličiny lze proto pro daný model hvězdy považovat za funkce jediné proměnné, např. vzdálenosti R od středu hvězdy či hmoty M_R obsažené v kouli o poloměru R.

Přesto je dobře si uvědomit, jaká další zjednodušení jsou činěna:

• Zanedbává se rotace hvězd (odstředivá síla, změna tvaru hvězdy, diferenciální rotace). Modely, které berou rotaci hvězd v potaz a opouštějí předpoklad sférické symetrie, existují zatím jen ve velmi zjednodušené formě, jak o tom bude řeč později.

• Zanedbávají se možná magnetická pole a jejich vliv na stavbu hvězdy.

• Používá se nedokonalá teorie konvekce, která empiricky volí poměr mezi střední volnou dráhou konvektivního elementu a jeho lineárním rozměrem; předpokládá se, že termodynamické procesy v nitru hvězdy probíhají adiabaticky, což je ale dobrá aproximace.

• Přetrvává určitá nepřesnost v hodnotách extinkčních (=opacitních) koeficientů hvězdné látky (i když se situace v posledních letech hodně zlepšila) a tyto koeficienty se pro výpočty hvězdných niter používají středované přes celé elektromagnetické spektrum.

• Přetrvává i nejistota v určení účinných průřezů jaderných reakcí, což vede obecně k větším chybám v časové škále, než v povrchových charakteristikách modelových hvězd. Podle nejnovějších studií se nejistoty v určení účinných průřezů reakcí pohybují v rozmezí 5 až 40 %.

2 Obecné zákonitosti a fyzikální vztahy

2.1 Základní pojmy

Hybnost, též impuls, rusky količestvo dviženija je

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \tag{1}$$

kde $\vec{v}$ je rychlost pohybu hmotného bodu o hmotě m. Hybnost lze stejně jako rychlost považovat za vektor. První Newtonův zákon setrvačnosti lze zapsat ve formě

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0. \tag{2}$$

Druhý Newtonův zákon síly stanoví, že časová změna hybnosti je rovna výslednici působících sil $\vec{F}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{3}$$

Pojmy teploty, hustoty a tlaku

Teplota T V klasickém pojetí se vychází ze zjištění, že jsou-li teplejší a chladnější těleso či látka v kontaktu, tepelný rozdíl mezi nimi rychle zmizí a ustaví se tepelná rovnováha. Dále je z pozorování zjištěno, že čím je látka teplejší, tím větší je její objem. Teplota látky se proto může definovat jako míra objemu nějaké standardní látky a kalibrovat např. bodem tání ledu a varu vody při konstantním zvoleném tlaku.

Hustota ρ je množství hmoty v objemové jednotce.

Tlak P je síla, kterou částice plynu v daném místě působí na jednotku plochy. Tlak v daném místě působí ve všech směrech stejně.

Střední hmotnost částic směsi plynu Relativní hmotnosti atomů jednotlivých chemických prvků či isotopů se nazývají *atomovými hmotnostmi*. Za jednotku atomové hmotnosti byla v minulosti přijímána $\frac{1}{16}$ atomové hmotnosti atomu kyslíku. V současnosti je přijímána přesnější definice: Za jednotku relativní amotové hmotnosti se přijímá $\frac{1}{12}$ klidové hmotnosti nuklidu uhlíku $^{12}_{6}\mathrm{C}$. Atomová hmotnost atomu vodíku činí $A_{\mathrm{H}} = (1,00782504679 \pm 0,00000000013)$ a ve stejných jednotkách se obecně definují relativní částicové hmotnosti atomů, molekul, elektronů, fotonů a podobně.

Gramatomem nebo grammolekulou se nazývá takové množství nějakého chemického prvku, molekuly či částice, jehož hmotnost je číselně rovna atomové či obecně částicové váze ve výše uvedených relativních jednotkách. Ve starší literatuře se tato hmotnost často nazývá molekulovou váhou (molecular weight) a obvykle se označuje symbolem μ. Zde budeme mluvit o molekulové hmotnosti s tím, že budeme chápat, že tento pojem se vztahuje jak na plyn složený z molekul, tak na plyn atomový či na plasma složené z iontů a volných elektronů. Platí tedy, že molekulová hmotnost vodíku činí

$$\mu_H = (1,00782504679 \pm 0,00000000013)\,\mathrm{g\,mol^{-1}} \tag{4}$$

Mějme m gramů vodíku. To bude představovat n atomů vodíku. Nyní mějme uskupení rovněž n atomů jiného prvku s molekulovou hmotností μ. Hmotnost tohoto souboru atomů zřejmě bude

$$m' = m\frac{\mu}{\mu_H}. \tag{5}$$

Z toho vyplývá Avogadrův zákon: Gramatom libovolné látky obsahuje vždy stejný počet částic dané látky, N_0. Číslu N_0 se říká Avogadrovo číslo a numericky jej můžeme určit např. pro atom vodíku tak, že jeho atomovou hmotnost dělíme skutečnou hmotností jednoho vodíkového atomu

$$m_{\mathrm{H}} = 1,67353252 \times 10^{-24}\,\mathrm{g}. \tag{6}$$

Dostaneme tak

$$N_0 = \frac{A_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{H}}} = 6,02214199 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}} \tag{7}$$

a platí, že objem gramatomu je

$$V = \frac{\mu}{\rho}. \tag{8}$$

Nyní předpokládejme, že 1 g směsi plynu obsahuje w_E gramů elementu E a 1 g elementu E obsahuje $\alpha_E N_0$ částic. Pak 1 g směsi obsahuje $\alpha_E w_E N_0$ častic elementu E a celkový počet částic 1 g směsi je

$$n = N_0 \sum_E \alpha_E w_E. \tag{9}$$

Často se uvažuje počet částic v objemové jednotce (particle density) N. Platí zřejmě

$$N = \rho n = \rho N_0 \sum_E \alpha_E w_E. \tag{10}$$

Střední molekulovou hmotnost směsi μ lze opět podle Avogadrova zákona definovat jako v gramech vyjádřenou hmotnost souboru N_0 částic směsi. Zřejmě tedy platí

$$\mu = \frac{N_0}{n} = \frac{1}{\sum_E \alpha_E w_E}. \tag{11}$$

Povšimněme si ještě, že pro neutrální plyn bude zřejmě

$$\alpha_E = \frac{1}{A_E}. \tag{12}$$

Označíme-li ještě Z_E náboj elementu E, pak při úplné ionizaci vznikne z 1 atomu Z_E elektronů a 1 iont, tedy $Z_E + 1$ částic, a bude tedy

$$\alpha_E = \frac{1 + Z_E}{A_E}. \tag{13}$$

2.2 Stavová rovnice

Stavovou rovnicí se nazývá funkční závislost mezi stavovými veličinami popisujícími vlastnosti nějaké směsi plynu či plasmatu, tedy vztah mezi tlakem, hustotou (či objemem) a teplotou.

Stavová rovnice ideálního plynu

Ideálním plynem se nazývá soubor dokonale elastických, hladkých a sférických částic, splňujících následující tři podmínky:

1. Rozměry částic jsou mnohem menší než jejich střední volná dráha mezi srážkami, takže je lze považovat za hmotné body.

2. Trvání srážky je mnohem kratší než doba volného pohybu mezi srážkami.

3. Částice na sebe navzájem mimo srážky nepůsobí žádnými přitažlivými či odpudivými silami, to znamená, že mimo srážky se pohybují konstantní rychlostí a po přímce, jejich energie je výlučně kinetická.

Protože tlak P v látce závisí pouze na jejím vniřním stavu, nikoliv na tvaru, který zaujímá či na její celkové hmotě M, závisí tlak zřejmě na teplotě t a hustotě ρ či specifickém objemu v t.j. objemu, který zaujímá jednotková hmota. Je tedy

$$v = \rho^{-1} \ a \ P = f(v, t). \tag{14}$$

Podle Boyleova-Maroittova zákona je součin tlaku a specifického objemu plynu při konstantní teplotě rovněž konstantní, což znamená, že stavová rovnice musí mít tvar

$$Pv = h(t), \tag{15}$$

kde $h(t)$ je nějaká funkce teploty. Protože při konstantním tlaku je ale teplota závislá na rozdílu mezi aktuálním objemem a referenčním objemem (např. při nulové teplotě), platí

$$t = (v - v_0) \times \ g(P), \tag{16}$$

kde indexem 0 jsou značeny hodnoty veličin při teplotě 0°C a $g(P)$ je nějaká funkce tlaku.

Podle Gayova-Lussacova zákona zvětší všechny plyny při zahřátí z 0°C na 1°C svůj objem o α (zhruba 1/273-tinu) svého objemu, který zaujímají při teplotě 0°C. Pro $t = 1$ je tedy

$$v - v_0 = \alpha v_0, \, 1 = \alpha v_0 g(P) \, a \, P v_0 = h(t_0). \tag{17}$$

Eliminací veličin v, v_0 a funkce $g(P)$ s využitím předchozích vztahů dostáváme

$$v - v_0 = t/g(P) = \alpha t v_0, \tag{18}$$

takže

$$h(t) - h(t_0) = P(v - v_0) = \alpha t P v_0 = \alpha t h(t_0), \tag{19}$$

a tedy lineární teplotní závislost

$$h(t) = h(t_0)(1 + \alpha t). \tag{20}$$

Stavová rovnice pak nabývá tvar

$$P = h(t_0) v^{-1} (1 + \alpha t). \tag{21}$$

Věci se zjednoduší zavedením *absolutní teploty* T, pro níž je nulový bod tání ledu $1/\alpha$°C, tedy asi 273°C. Je pak $t = T - \alpha^{-1}$, takže

$$P = h(t_0)v^{-1}(1 + \alpha T - 1) = \alpha h(t_0)v^{-1}T. \tag{22}$$

Po zavedení absolutní teploty není již mírou teploty rozdíl dvou objemů, ale objem sám.

Jestliže místo specifického objemu budeme uvažovat objem 1 gramatomu, který pro všechny plyny obsahuje stejný počet částic, bude ve stavové rovnici místo konstanty $\alpha h(t_0)$ konstanta

$$\Re = (8,314472 \pm 0,000015)\,\mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}, \tag{23}$$

které se obvykle říká universální plynová konstanta.

Stavová rovnice ideálního plynu nabude pak tvar

$$P = \frac{\rho}{\mu}\Re T. \tag{24}$$

Stavovou rovnici lze rovněž odvodit ze statistické fyziky pro klasické Maxwellovo rozdělení částic ve tvaru

$$P = \frac{N_V}{V}kT, \tag{25}$$

kde N_V je počet částic v objemu V a

$$k = (1,3806503 \pm 0,0000024) \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}} \tag{26}$$

je Boltzmannova konstanta.

Pokud zvolíme objem jednoho gramatomu, bude $N_V = N_0$ a podle (8) můžeme stavovou rovnici zapsat ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu}N_0 kT. \tag{27}$$

Mezi použitými konstantami platí tedy zřejmě vztah

$$\Re = kN_0. \tag{28}$$

Někdy se lze setkat i se zápisem stavové rovnice ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu}\frac{A_\mathrm{H}}{m_\mathrm{H}}kT, \tag{29}$$

kde bylo Avogardovo číslo eliminováno pomocí vztahu (28). (Někteří autoři dokonce místo přesné molekulové hmotnosti vodíku berou $A_{\mathrm{H}} = 1$ a zapisují stavovou rovnici ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu} \frac{k}{m_{\mathrm{H}}} T, \tag{30}$$

jako např. Aller 1953, 1963.)

Stavová rovnice hvězdné látky

Prostředí ve hvězdách je tvořeno směsí plasmatu, plynu a záření. Plasma tvoří obvykle zhruba 95% celkové hmoty hvězdy. Pouze vrstvy v blízkosti povrchu hvězdy jsou ve stavu neúplné ionizace. Zejména u méně hmotných hvězd je navíc v centrálních částech tak vysoká koncentrace hmoty, že tam dochází ke stavu degenerace. Při hustotách nad asi $10^9\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, nabývá tato degenerace relativistický charakter. To nastává až v nitrech bílých trpaslíků.

Vzhledem k tomu, že např. podle klasického Maxwellova rozdělení je nejpravděpodobnější rychlost částice v_M dána vztahem

$$v_M = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \tag{31}$$

kde m a T jsou hmotnost a teplota částice a k Boltzmannova konstanta, je zřejmé, že kinetické rychlosti částic jsou klesající funkcí jejich hmotnosti. Stupeň degenerace iontů je proto mnohem menší než pro elektrony. Ukazuje se, že alespoň v oblastech nerelativistické degenerace lze ionty považovat za nedegenerované, chovající se jako částice ideálního plynu. Iontová degenerace nastupuje až při hustotách nad $10^{12}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Zajímáme-li se o stavovou rovnici hvězdné látky, můžeme uvažovat jednotlivě tlak iontů P_i, tlak volných elektronů P_e a tlak záření P_r. Podle Daltonova zákona bude totiž výsledný tlak aritmetickým součtem jednotlivých příspěvků, tedy

$$P = P_i + P_e + P_r. \tag{32}$$

Jak si ukážeme v dalším výkladu, lze s vysokou přesností považovat nitro hvězdy za absolutně černé těleso a pro tlak záření si odvodíme vztah

$$P_r = \frac{a}{3} T^4, \tag{33}$$

kde

$$a = 7,565767 \times 10^{-16}\,\mathrm{W\,m^{-3}\,K^{-4}} \tag{34}$$

je Stefanova-Boltzmannova konstanta.

Bývá zvykem označovat poměr tlaku plynu P_g, kde

$$P_g = P_i + P_e \tag{35}$$

k celkovému tlaku symbolem β, takže lze dále psát

$$\beta P = P_g = P - P_r, \tag{36}$$

a vzhledem k výrazu pro tlak záření také

$$\beta = 1 - \frac{aT^4}{3P}. \tag{37}$$

Vzhledem k tomu, co jsme si již řekli dříve o stavové rovnici ideálního plynu, víme, že v nedegenerovaných oblastech hvězdy můžeme tlak plynu popsat pomocí střední atomové hmotnosti a stavová rovnice hvězdné látky bude mít tvar

$$P = \frac{\rho}{\mu}\Re T + \frac{a}{3}T^4. \tag{38}$$

V oblastech elektronové degenerace je situace složitější a musíme uvažovat ionty a elektrony zvlášť. Můžeme ovšem předpokládat, že elektronová degenerace se uplatňuje pouze v situacích, kdy je plyn již plně ionizován, takže vzhledem k dříve řečenému můžeme pro atomovou hmotnost iontů μ_i a volných elektronů μ_e psát

$$\mu_i^{-1} = \sum_E \frac{w_E}{A_E}, \quad \mu_e^{-1} = \sum_E \frac{Z_E w_E}{A_E}. \tag{39}$$

Pro střední molekulovou hmotnost plasmatu tedy zřejmě platí

$$\mu^{-1} = \mu_i^{-1} + \mu_e^{-1}. \tag{40}$$

Pro počty iontů a elektronů v objemové jednotce můžeme tak psát

$$N_i = \rho\frac{N_0}{\mu_i}, \quad N_e = \rho\frac{N_0}{\mu_e}. \tag{41}$$

Jak již bylo řečeno, zůstavají ionty i za velmi extrémních podmínek prakticky nedegenerované, takže stavová rovnice intového plynu zůstává ve tvaru

$$P_i = \frac{\rho}{\mu_i} N_0 kT. \tag{42}$$

Pro degenerovaný elektronový plyn je ovšem třeba použít kvantovou statistiku, která pro nerelativistickou degeneraci vede na následující vztahy pro počet elektronů v objemové jednotce a pro elektronový tlak

$$N_e = \frac{4\pi}{h^3}(2m_e kT)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\psi) \tag{43}$$

a

$$P_e = \frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} N_e kT \tag{44}$$

kde h je Planckova konstanta, m_e hmotnost elektronu, ψ t.zv. parametr degenerace (čím vyšší hodnota, tím vyšší stupeň degenerace) a

$$F_k(\psi) = \int\limits_0^\infty \frac{u^k du}{e^{u-\psi} + 1}. \tag{45}$$

S využitím vztahu (41) dostaneme

$$\rho = \frac{4\pi}{N_0 h^3}(2m_e k)^{\frac{3}{2}} \mu_e T^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\psi) \tag{46}$$

a

$$P_e = \frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} \frac{\rho}{\mu_e} \Re T. \tag{47}$$

To jsou ovšem parametrické rovnice a počítat parametr ψ např. z rovnice (46) z hustoty a teploty přímo by nebylo snadné. Naštěstí existuje několik velmi dobrých aproximací. Zde se přidržíme aproximačního vzorce z práce Larson a Demarque (1964), který pro $\psi < 30$ dává chybu menší než 0,02 %:

$$\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi) = F_{\frac{1}{2}}(\psi) \frac{(1 + 0,1938 F_{\frac{1}{2}}(\psi))^{\frac{5}{3}}}{1 + 0,12398 F_{\frac{1}{2}}(\psi)}. \tag{48}$$

Pro celkový tlak můžeme pak psát s použitím vztahu (40)

$$\begin{aligned}
\beta P &= P_i + P_e = \frac{\rho}{\mu_i}\Re T + \frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)}\frac{\rho}{\mu_e}\Re T \\
&= \frac{\rho}{\mu}\Re T(\frac{\mu}{\mu_i} + \frac{\mu}{\mu_e}\frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)}) \qquad (49) \\
&= \frac{\rho}{\mu}\Re T(\mu(\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e}) + \frac{\mu}{\mu_e}(\frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} - 1)) \\
&= \frac{\rho}{\mu}\Re T(1 + \frac{\mu}{\mu_e}(\frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} - 1)).
\end{aligned}$$

Označíme-li

$$\lambda = 1 + (1 + \frac{\mu}{\mu_e}(\frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} - 1), \qquad (50)$$

můžeme zapsat stavovou rovnici platnou pro oblasti úplné ionizace včetně oblastí nerelativistické degenerace ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu}\Re T\lambda + \frac{a}{3}T^4. \qquad (51)$$

Povšimněme si ještě, že parametr λ můžeme z hustoty a teploty vypočítat pomocí rovnic (46) a (48).

Poznamenejme závěrem, že pro limitní stav úplné elektronové degenerace plyne z Fermiho-Diracova rozdělení stavová rovnice ve tvaru

$$P_e = K_1(\frac{\rho}{\mu_e})^{\frac{5}{3}}, \qquad (52)$$

kde

$$K_1 = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{h^2}{m_e m_p^{\frac{5}{3}}}, \qquad (53)$$

m_e je hmotnost elektronu a m_p hmotnost protonu. Elektronová degenerace nastává ve chvíli, kdy elektronový tlak počítaný podle vztahu (52) převýší tlak plynu počítaný z rovnice ideálního plynu (24).

Pro zvláště vysoké hustoty se uplatní relativistické Fermiho-Diracovo rozdělení a limitně platí stavová rovnice ve tvaru

$$P_e = K_2 (\frac{\rho}{\mu_e})^{\frac{4}{3}}, \tag{54}$$

kde

$$K_2 = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{8m_p^{\frac{4}{3}}}. \tag{55}$$

Je třeba si ještě říci něco o molekulové hmotnosti. V některých současných vývojových modelech hvězd je studován detailně vývoj jednotlivých chemických prvků či dokonce nuklidů. V tom případě musí být stejně detailně uvažována i střední molekulová hmotnost. Obvykle se ale uvažují jen nejpočetnější prvky. To je přípustné, protože při úplné ionizaci pro všechny težší prvky platí velmi přibližně, že

$$\alpha_E \sim 0,5. \tag{56}$$

Označme relativní hmotnostní obsah vodíku w_H symbolem X, helia Y a všech těžších prvků Z, takže

$$Z = 1 - X - Y. \tag{57}$$

Budeme-li ještě uvažovat relativní zastoupení dusíku X_N, lze podle (11) a (13) velmi přibližně psát

$$\begin{aligned} \mu^{-1} &= 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{8}{14}X_N + \frac{1}{2}(1 - X - Y - X_N) \\ &= 1,5X + 0,25Y + \frac{1}{14}X_N + 0,5. \end{aligned} \tag{58}$$

Analogicky podle vztahu (40) dostáváme

$$\begin{aligned} \mu_e^{-1} &= X + 0,5Y + 0,5X_N + 0,5(1 - X - Y - X_N) \\ &= 0,5(1 + X). \end{aligned} \tag{59}$$

Vidíme tedy, že molekulová hmotnost volných elektronů závisí pouze na relativním hmotnostním obsahu vodíku.

Situace je ovšem složitejší v oblastech v blízkosti povrchu hvězdy, kde je hvězdná látka ionizována pouze částečně. S pomocí vztahů (40) a (41) můžeme pro molekulovou hmotnost psát

$$\mu = \frac{\mu_i \mu_e}{\mu_i + \mu_e} = \frac{\mu_i}{1 + \frac{\mu_i}{\mu_e}} = \frac{\mu_i}{1 + \frac{N_e}{N_i}} = \frac{\mu_i}{1 + Q}. \tag{60}$$

Zbývá tedy určit relativní poměr počtu elektronů připadajících na jeden atom směsi Q. Označme x_j^r relativní počet atomů typu j v r-tém stupni ionizace, y_j^r relativní počet atomů typu j, které jsou ve vyšším než r-tém stupni ionizace, ν_j relativní počet atomů typu j, M_j počet elektronů atomu typu j a N počet druhů atomů ve směsi. Platí zřejmě

$$y_j^r = \sum_{s=r+1}^{M_j} x_j^s \tag{61}$$

a pro hledanou veličinu Q lze psát

$$Q = \sum_{j=1}^{N} \nu_j \sum_{r=0}^{M_j} r x_j^r = \sum_{j=1}^{N} \sum_{r=0}^{M_j - 1} y_j^r \nu_j. \tag{62}$$

Veličiny x_j^r a Q jsou kromě rovnice (62) navzájem spojeny ještě vztahy plynoucími přímo ze Sahovy rovnice ve tvaru

$$\frac{x_j^{r+1} P_e}{x_j^r} = K_j^r, \tag{63}$$

kde

$$K_j^r = \frac{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} \frac{U_j^{r+1}}{U_j^r} e^{\frac{-\chi_j^r}{kT}}, \tag{64}$$

m_e je hmotnost elektronu χ_j^r je energie potřebná ke zvýšení ionizace z r-tého na $(r+1)$-ní stupeň a U_i^r je partiční funkce r-krát ionizovaného atomu typu i. Pro poměr tlaku plynu P_g k elektronovému tlaku P_e zřejmě platí

$$\frac{P_g}{P_e} = \frac{N_i + N_e}{N_e} = \frac{1}{Q} + 1 = \frac{1+Q}{Q}, \tag{65}$$

takže vztahy mezi námi uvažovanými veličinami lze zapsat ve tvaru

$$\frac{x_j^{r+1} P_g}{x_j^r} \frac{Q}{1+Q} = K_j^r, \tag{66}$$

Při konkrétní aplikaci je opět třeba se rozhodnout pro to, jaký soubor atomů bude detailně uvažován.

3 Základní rovnice stavby hvězd

3.1 Rovnice kontinuity

Budiž M_R hmota obsažená v kouli o poloměru R a $\rho(R)$ hustota hvězdné látky ve vzdálenosti R od středu hvězdy. Pro případ sférické symetrie zcela zřejmě platí diferenciální vztah

$$dM_R = 4\pi R^2 \rho dR, \tag{67}$$

který vede na diferenciální rovnici kontinuity či zachování hmoty

$$\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}. \tag{68}$$

3.2 Pohybová rovnice a její limitní případ: rovnice hydrostatické rovnováhy

Vyhledem k zanedbání rotace a elektromagnetických sil stačí uvažovat pouze gravitaci a gradient tlaku. Protože orientace souřadné soustavy míří na rozdíl od působící síly směrem od centra k povrchu, bude mít pohybová rovnice tvar

$$dM_R \frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM_R dM_R}{R^2} - 4\pi R^2 dP, \tag{69}$$

kde dP a dM_R jsou změna tlaku a přírůstek hmoty mezi místy s poloměrem R a $R + dR$.

S použitím rovnice kontinuity (68) lze pohybovou rovnici rovněž přepsat do tvaru

$$\rho\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{G\rho M_R}{R^2} - \frac{dP}{dR}, \tag{70}$$

který popisuje pohyb jednotkového objemu.

Pro dynamicky stabilní hvězdy lze člen popisující zrychlení zanedbat a uvažovat pouze t.zv. rovnici hydrostatické rovnováhy, t.j. situaci, kdy změna tlaku od místa k místu právě vyrovnává váhu vrstev nad oním místem:

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4}. \tag{71}$$

3.3 Rovnice tepelné rovnováhy

Proberme si nyní, jak a jakým způsobem hvězda získává a přeměňuje svou tepelnou energii.

Jak jsme si pověděli v úvodu, koncem třicátých let 20. století se podařilo dokázat, že hlavním dlouhodobým zdrojem zářivé energie hvězd jsou syntetické jaderné reakce, tedy spojování dvou či více jader lehkých prvků na těžší, při kterém se uvolňuje velké množství zářivé energie.

Energeticky zdaleka nejvydatnější slučovací jadernou reakcí je přeměna vodíku na helium. Známy jsou celkem čtyři způsoby této přeměny.

První tři se shrnují pod název proton-protonový (dále p-p) cyklus. Jejich společnou vlastností je, že se postupně čtyři protony, t.j. nuklidy $^1_1\mathrm{H}$ transformují ve stabilní nuklid helia $^4_2\mathrm{He}$.

Schematicky lze postupné reakce zapsat následovně:

$$^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^2_1\mathrm{H} + \mathrm{e}^+ + \nu, \tag{72}$$

kde e^+ označuje positron a ν neutrino. Positron se anihiluje s nejbližším volným elektronem a vznikne kvantum elektromagnetického záření, tedy foton:

$$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \rightarrow \gamma \tag{73}$$

Při další reakci

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + \gamma \tag{74} $$

se opět uvolní kvantum elektromagnetického záření.

Až dosud uvedené reakce jsou shodné pro všechny tři možné verze p-p cyklu. Poté mohou nastávat různé alternativy.

Nejjednodušší je p-p I, při kterém reagují dva nuklidy ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$:

$$ {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \tag{75} $$

Dvě další varianty p-p cyklu mají následující reakci společnou

$$ {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + \gamma \tag{76} $$

Poté nastane buď cyklus p-p II ve formě následujících tří reakcí

$$ {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + \mathrm{e}^{-} \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \nu \tag{77} $$

$$ {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be} + \gamma \tag{78} $$

$$ {}^{8}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{79} $$

nebo cyklus pp-III:

$$ {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{8}_{5}\mathrm{B} + \gamma \tag{80} $$

$$ {}^{8}_{5}\mathrm{B} \rightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be}^{*} + \mathrm{e}^{+} + \nu \tag{81} $$

$$ \mathrm{e}^{+} + \mathrm{e}^{-} \rightarrow \gamma \tag{82} $$

$$ {}^{8}_{4}\mathrm{Be}^{*} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{83} $$

kde hvězdička u nuklidu berylia označuje energeticky vyšší, excitovaný stav, vedoucí k rychlému rozpadu jádra.

Povšimněme si, že bilance všech tří verzí p-p cyklu je stejná: zaniknou čtyři jádra vodíku a vznikne stabilní nuklid helia, přičemž se uvolní několik kvant elektromagnetického záření a dvě neutrina.

Množství energie, které se těmito reakcemi uvolní v 1 g hvězdné látky za 1 s lze spočítat podle následujících složitých vztahů

$$ E_{\mathrm{pp}} = E_{\mathrm{pp1}} + E_{\mathrm{pp2}} + E_{\mathrm{pp3}} \tag{84} $$

$$ E_{\mathrm{pp1}} = (1-\gamma)E \tag{85} $$

$$ E_{\mathrm{pp2}} = \frac{1,96\gamma}{1+W}E \tag{86} $$

$$E_{\mathrm{pp3}} = \frac{1,47\gamma W}{1+W}E \tag{87}$$

$$E = 2,06.10^6 f_{1,1} g_{1,1} \rho T_6^{-\frac{2}{3}} X^2 \mathrm{e}^{-33,804 T_6^{-\frac{1}{3}}} \tag{88}$$

$$\gamma = \alpha(\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} - 1) \tag{89}$$

$$\alpha = 5,48.10^{17}\left(\frac{Y}{4X}\right)^2 \mathrm{e}^{-100 T_6^{-\frac{1}{3}}} \tag{90}$$

$$W = 1,22.10^{16} f_{7,1} g_{7,1} \mathrm{e}^{-102,6 T_6^{-\frac{1}{3}}} \frac{X}{1+X} T_6^{-\frac{1}{6}} \tag{91}$$

$$f_{1,1} = 1 + 0,25\rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}} \tag{92}$$

$$f_{7,1} = 1 + \rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}} \tag{93}$$

$$g_{1,1} = 1 + 0,012 T_6^{\frac{1}{3}} + 0,0078 T_6^{\frac{2}{3}} + 0,00065 T_6 \tag{94}$$

$$g_{7,1} = 1 + 0,004 T_6^{\frac{1}{3}} \tag{95}$$

jako funkce teploty T, resp. $T_6 = 10^{-6}T$, hustoty ρ a relativního obsahu vodíku X a helia Y.

Čtvrtý způsob jaderné přeměny vodíku na helium, který se významně uplatňuje pro vyšší teploty než p-p cykly, je t.zv. CNO cyklus. Do něj v roli jakéhosi katalyzátoru vstupují nuklidy dusíku nebo uhlíku. Proto by tato reakce ve hvězdě složené pouze z vodíku a helia nemohla nastávat. Schematicky lze reakce CNO cyklu popsat takto:

$$^{12}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{13}_{7}\mathrm{N} + \gamma \tag{96}$$

$$^{13}_{7}\mathrm{N} \rightarrow ^{13}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{e}^+ + \nu \tag{97}$$

$$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \rightarrow \gamma \tag{98}$$

$$^{13}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{14}_{7}\mathrm{N} + \gamma \tag{99}$$

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{15}_{8}\mathrm{O} + \gamma \tag{100}$$

$$^{15}_{8}\mathrm{O} \rightarrow ^{15}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{e}^+ + \nu \tag{101}$$

$$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \rightarrow \gamma. \tag{102}$$

Poté může reakce pokračovat dvojím způsobem. Buď vznikne přímo heliové jádro a uhlík, který vstoupil do reakce, se opět vyloučí, tedy

$$^{15}_{7}\mathrm{N} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{12}_{6}\mathrm{C} + ^{4}_{2}\mathrm{He}, \tag{103}$$

nebo proběhne několik dalších reakcí a dojde k vyloučení nuklidu dusíku:

$$
\begin{aligned}
{}^{15}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{16}_{8}\mathrm{O} + \gamma &(104)\\
{}^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{17}_{9}\mathrm{F} + \gamma &(105)\\
{}^{17}_{9}\mathrm{F} &\rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + \mathrm{e}^{+} + \nu &(106)\\
\mathrm{e}^{+} + \mathrm{e}^{-} &\rightarrow \gamma &(107)\\
{}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} &\rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. &(108)
\end{aligned}
$$

Množství energie uvolňované z 1 g látky za 1 s touto reakcí lze spočítat ze vztahů

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{CNO}} &= 7,94.10^{27} f_{14,1} g_{14,1} \rho X X_N T_6^{-\frac{2}{3}} \mathrm{e}^{-152,313 T_6^{-\frac{1}{3}}} &(109)\\
f_{14,1} &= 1 + 1,75 \rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}} &(110)\\
g_{14,1} &= 1 + 0,0027 T_6^{\frac{1}{3}} - 0,0037 T_6^{\frac{2}{3}} - 0,00007 T_6. &(111)
\end{aligned}
$$

Průběh této syntézy závisí kriticky na reakci (100), která je 'nejpomalejší' t.j. nastává velmi nesnadno. Proto je ve vztahu (109) veličina X_N označující relativní obsah dusíku. Obvykle stačí přijmout empiricky závěr z modelů niter počítaných s detailním chemickým složením a brát jednoduše $X_N = Z/3$.

Při teplotě vyšší než 10^8 K dochází v oblastech s vyšším obsahem helia k další významné slučovací reakci, nazývané 3α. Při ní se postupně tři heliová jádra přemění na jádro uhlíku a další heliová jádra se poté řetězovitě dál slučují na těžší prvky:

$$
\begin{aligned}
{}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} &\rightleftarrows {}^{8}_{4}\mathrm{Be} &(112)\\
{}^{8}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} &\rightleftarrows {}^{12}_{6}\mathrm{C}^{*} &(113)\\
{}^{12}_{6}\mathrm{C}^{*} &\rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \gamma &(114)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} &\rightarrow {}^{16}_{8}\mathrm{O} + \gamma &(115)\\
{}^{16}_{8}\mathrm{C} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} &\rightarrow {}^{20}_{10}\mathrm{Ne} + \gamma &(116)\\
{}^{20}_{10}\mathrm{Ne} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} &\rightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + \gamma &(117)\\
&\ldots\ldots\ldots &(118)
\end{aligned}
$$

atd.

Energetická produkce přeměny helia na uhlík je dána vztahy

$$E_{3\alpha} = 3,46.10^{17}\rho^2 Y^3 T_6^{-3} f_{3\alpha} \mathrm{e}^{-4352 T_6^{-1}} \quad (119)$$

$$f_{3\alpha} = 1 + 2,4\rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}}. \quad (120)$$

Při ještě vyšších teplotách nad 6.10^8 K dochází k řadě dalších, ale energeticky stále méně významných reakcí (např. přeměně uhlíku na hořčík) až dojde ke vzniku stabilních nuklidů skupiny železa.

Kromě jaderných reakcí a poklesu ionizace v podpovrchových vrstvách nemá hvězda žádné další aktivní zdroje energie a lze ji považovat za isolovaný termodynamický systém. Označíme-li L_R množství energie procházející za jednotku času povrchem koule o poloměru R od centra směrem k povrchu a budou-li dL_R a dM_R označovat změnu této energie a přírůstek hmoty mezi koulemi o poloměrech R a $R+dR$, pak lze pro celkovou změnu tepelné energie Q v 1 g hvězdné látky nacházející se ve vzdálenosti R od centra hvězdy za čas dt psát

$$dQ = TdS = (E_{nuk} - \frac{dL_R}{dM_R})dt, \quad (121)$$

kde dS je změna entropie za čas dt a E_{nuk} je produkce energie jadernými reakcemi v 1 g hvězdné látky daném místě za jednotku času.

Po úpravě tedy

$$\frac{dL_R}{dM_R} = E_{nuk} - T\frac{dS}{dt}. \quad (122)$$

To je rovnice tepelné rovnováhy v základním tvaru. Při skutečném výpočtu je ovšem třeba specifikovat časové změny entropie konkrétně. Zahrnují totiž změny potenciální i vnitřní energie, včetně změn ionizace v podpovrchových vrstvách. Tento postup si zde alespoň naznačíme. Podle 1. věty termodynamické lze psát (s uvážením že objem 1 g látky $V = \frac{1}{\rho}$)

$$TdS = dU + PdV = dU - \frac{P}{\rho^2}d\rho. \quad (123)$$

Veličina U označuje vnitřní energii, která je obecně funkcí stavových veličin a střední hmotnosti částic μ, takže její změnu lze rozkládat do tvaru

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T}dT + \frac{\partial U}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial U}{\partial \mu}d\mu. \tag{124}$$

Je ovšem důležité si uvědomit, že diferenciál $d\mu$ v rovnici (124) představuje takto samostatně pouze změny způsobené změnami chemického složení (buď v důsledku nukleární přeměny elementů nebo vlivem konvekce zasahující hluboko do oblastí s gradientem chemického složení, který vznikl v důsledku nuklearních změn během předchozího vývoje hvězdy). Nejde naopak o změny vyvolané ionizací ve vrstvách blíže k povrchu hvězdy. Ty jsou totiž – jak jsme viděli – funkcí teploty a nejsou proto nezávislé.

Je třeba si ještě uvést konkrétní výzazy pro vnitřní energii hvězdné látky. Statistická fyzika a teorie záření dávají pro jednotlivé složky tyto výrazy:

$$U_i = \frac{3}{2}n_i kT \tag{125}$$

$$U_e = \frac{3}{2}n_e kT \frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}}{F_{\frac{1}{2}}} \tag{126}$$

$$U_r = \frac{aT^4}{\rho}, \tag{127}$$

kde n_i a n_e představují počet iontů a počet elektronů v 1 g hvězdné látky. Ty lze vyjádřit pomocí Avogadrova čísla a střední molekulové hmotnosti a pro celkovou vnitřní energii plasmatu lze pak psát

$$U_i + U_e = \frac{3}{2}N_0 kT \left(\frac{1}{\mu_e}\frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}}{F_{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\mu_i} \right) \tag{128}$$

$$= \frac{3}{2}\Re T(\mu_i^{-1} + \mu_e^{-1} + \mu_e^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}}{F_{\frac{1}{2}}} - 1 \right)), \tag{129}$$

takže při použití vztahů (146) a (51) dostáváme

$$U_i + U_e = \frac{3}{2}\frac{\Re}{\mu}T\lambda = \frac{3}{2}\frac{\beta P}{\rho} \tag{130}$$

$$U_r = 3(1-\beta)\frac{P}{\rho} \tag{131}$$

$$U_i + U_e + U_r \;=\; \frac{3}{2}\frac{\beta P}{\rho} + 3(1-\beta)\frac{P}{\rho} = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho}(2-\beta). \quad (132)$$

V podpovrchových vrstvách je třeba navíc uvažovat i příspěvek ionizační energie. Označíme-li χ_j^r ionizační potenciál j-tého prvku pro r-tý stupeň ionizace, pak lze při stejné notaci jako jsme použili u stavové rovnice v podpovrchových vrstvách psát

$$U_{ion} \;=\; \frac{N_0}{\mu_i}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\sum_{r=0}^{M_j}x_j^r\sum_{s=0}^{r-1}\chi_j^s \quad (133)$$

$$\;=\; \frac{\Re}{k\mu_i}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\sum_{r=0}^{M_j-1}\chi_j^r y_j^r. \quad (134)$$

3.4 Rovnice přenosu energie

Změna teploty od místa k místu je ve hvězdném nitru určována způsobem přenosu energie ve hvězdě. V principu existují tři způsoby přenosu energie: zářením (zářivou difusí), vedením tepla (částicovou difusí), a konvekcí. První dva způsoby dva způsoby jsou mikroskopické, poslední je makroskopický. Tepelná vodivost hvězdného materiálu je ve vetšině případů zanedbatelná, roli hraje pouze v podmínkách extremních hustot (bílí trpaslíci, neutronové hvězdy), kde se uplatňuje elektronová degenerace. Formálně lze ovšem záření a vedení popisovat velmi podobně.

3.4.1 Rovnice zářivého přenosu energie

Příčin difuse je mnoho, od absorpce na negativních iontech vodíku až po rozptyl na volných elektronech. Míra neprůhlednosti hvězdného materiálu, *opacita* hvězdné látky, je velmi složitou funkcí hustoty ρ, teploty T, chemického složení a vlnové délky. Numericky tedy koeficient opacity udává, kolik zářivé energie je zachyceno v jednotkovém objemu o dané hustotě, teplotě a chemickém složení. Výpočet opacitního koeficientu představuje samostatný a náročný úkol. Pro hvězdná nitra, kde se zvažuje jen celková energetická bilance, se používají koeficienty opacity středované přes všechny vlnové délky. Tyto koeficienty bývají v samostatných studiích obvykle tabelovány a při výpočtech modelů hvězdných niter se v takových tabulkách numericky interpoluje. Po řadu let byly používany tabulky Coxovy (Cox a spol. 1965), ale od poloviny devadesátých let jsou k dispozici tabulky nové, které m.j. umožnily nalézt příčinu pulsační nestability hvězd typu β Cep (Rogers a Iglesias 1992).

Popis zářivého přenosu energie musí vycházet z rovnice přenosu. Záření se charakterizuje především intenzitou, což je množství zářivé energie procházející kolmo jednotkovou plochou v jednotkovém intervalu frekvencí do jednotkového prostorového úhlu za jednotku času. Zde budeme uvažovat opět intenzitu integrovanou přes celý rozsah vlnových délek. Označme $I = I(R, \vartheta)$ intensitu záření ve vzdálenosti R od centra hvězdy do směru, který se spojnicí s centrem svírá úhel ϑ. Budiž dále j koeficient emise záření do jednotkového prostorového úhlu za jednotku času a na jednotku hmoty a κ koeficient opacity na jednotku hmoty. Uvažujme o energetické bilanci infinitesimálního válečku o výšce dx a podstavě o ploše ds. Záření, vstupující do válečku z prostorového úhlu $d\omega$, bude $I(R, \vartheta)dsd\omega$. Na druhém konci z něj bude do prostorového úhlu $d\omega$ vycházet záření $-I(R + dR, \vartheta + d\vartheta)dsd\omega$. Uvnitř válečku se pohltí energie $-I(R, \vartheta)\rho\kappa dxdsd\omega$. Vlastní záření válečku do prostorového úhlu $d\omega$ bude $j\rho dxdsd\omega$.

Má-li být zachována energetická rovnováha, musí tedy platit

$$\begin{aligned} &I(R, \vartheta)dsd\omega + j\rho dxdsd\omega = \\ &\quad I(R, \vartheta)\rho\kappa dxdsd\omega + I(R + dR, \vartheta + d\vartheta)dsd\omega. \end{aligned} \tag{135}$$

Použijeme-li ještě rozvoj

$$I(R + dR, \vartheta + d\vartheta) = I(R, \vartheta) + \frac{\partial I}{\partial R}dR + \frac{\partial I}{\partial \vartheta}d\vartheta \tag{136}$$

a geometrické vztahy

$$dR = dx \cdot \cos\vartheta \;\; a \;\; d\vartheta = -R^{-1}dx \cdot \sin\vartheta, \tag{137}$$

lze rovnici přenosu záření zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial I}{\partial R}\cos\vartheta - R^{-1}\sin\vartheta\frac{\partial I}{\partial \vartheta} + \kappa\rho I - j\rho = 0. \tag{138}$$

V této chvíli je užitečné zavést některé integrální veličiny. První je *hustota zářivé energie*. Množství zářivé energie dE procházející ploškou ds ze směru svírajícího s kolmicí na plošku úhel ϑ za čas dt bude zřejmě

$$dE = I \cos \vartheta ds dt d\omega. \tag{139}$$

Protože toto záření se pohybuje rychlostí světla c, naplní za čas dt objem $dV = cdtds \cos \vartheta$. Hustota záření přicházejícího z daného směru bude tedy

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{c} I d\omega. \tag{140}$$

Integrací přes celý prostorový úhel dostaneme pak celkovou hustotu záření

$$u = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I d\omega. \tag{141}$$

Další užitečnou veličinou je *tok záření* H, t.j. množství zářivé energie procházející jednotkovou plochou ze všech směrů. Je zřejmě

$$H = \int_0^{4\pi} I \cos \vartheta d\omega. \tag{142}$$

Třetí integrální veličinou je *tlak záření*. Uvažujme hybnost záření přicházejícího z určitého směru, dp. Je-li celková hmotnost tohoto záření m, lze pro jeho hybnost psát $dp = mc$. S použitím Einsteinovy rovnice

$$dE = mc^2 \tag{143}$$

je tedy výraz pro příspěvek hybnosti záření

$$dp = \frac{dE}{c}, \tag{144}$$

takže síla působící na plošku ds od uvažovaného příspěvku záření je podle druhého Newtonova zákona a s využitím vztahu (139)

$$\triangle f = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{I}{c} \cos \vartheta ds d\omega. \tag{145}$$

Složka síly působící kolmo na uvažovanou plošku bude ovšem $\triangle F = \triangle f \cos \vartheta$. Tlak je výsledná síla působící na jednotkovou plochu, tedy

$$P_r = \frac{1}{ds} \int_0^{4\pi} \triangle F = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I \cos^2 \vartheta d\omega. \tag{146}$$

Nyní se můžeme vrátit k rovnici přenosu (138). Její integrací přes celý prostorový úhel a s využitím vztahů (141), (142) a (146) dostáváme

$$\frac{dH}{dR} - \int_0^{4\pi} \frac{\sin\vartheta}{R} \frac{\partial I}{\partial\vartheta} d\omega + \kappa\rho c u - 4\pi j \rho = 0. \tag{147}$$

Zřejmě platí

$$\int_0^{4\pi} \frac{\partial I}{\partial\vartheta} \sin\vartheta d\omega = \int_0^{4\pi} \frac{\partial(I\sin\vartheta)}{\partial\vartheta} d\omega - \int_0^{4\pi} I\cos\vartheta d\omega, \tag{148}$$

takže

$$\int_0^{4\pi} \frac{\partial I}{\partial\vartheta} \sin\vartheta d\omega = \int_0^{4\pi} \frac{\partial(I\sin\vartheta)}{\partial\vartheta} d\omega - H. \tag{149}$$

Jestliže ještě využijeme geometrický vztah

$$d\omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi, \tag{150}$$

můžeme dále psát

$$\int_0^{4\pi} \frac{\partial(I\sin\vartheta)}{\partial\vartheta} d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial(I\sin\vartheta)}{\partial\vartheta} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi. \tag{151}$$

Nyní využijeme zřejmý vztah

$$\frac{\partial(I\sin^2\vartheta)}{\partial\vartheta} = \frac{\partial I}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta + 2I\sin\vartheta\cos\vartheta, \tag{152}$$

pomocí kterého můžeme ještě upravit poslední člen rovnice (151). Je totiž

$$\frac{\partial(I\sin\vartheta)}{\partial\vartheta}\sin\vartheta = \frac{\partial I}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta + I\sin\vartheta\cos\vartheta = \tag{153}$$

$$\frac{\partial(I\sin^2\vartheta)}{\partial\vartheta} - I\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{154}$$

Rovnici (151) můžeme pomocí toho dále upravit na tvar

$$\int_0^{4\pi} \frac{\partial(I\sin\vartheta)}{\partial\vartheta} d\omega = \int_0^{2\pi} [I\sin^2\vartheta]_{\vartheta=0}^{\pi} d\varphi \tag{155}$$

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta d\varphi = -H. \tag{156}$$

Rovnici (147) můžeme poté upravit do konečného tvaru

$$\frac{dH}{dR} + \frac{2H}{R} + \kappa\rho c u - 4\pi j\rho = 0. \tag{157}$$

Analogicky můžeme integrovat rovnici přenosu (138) násobenou faktorem $\cos\vartheta$:

$$\int\limits_{\omega} \frac{\partial I}{\partial R}\cos^2\vartheta d\omega - \frac{1}{R}\int\limits_{\omega} \frac{\partial I}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta d\omega \tag{158}$$

$$+\kappa\rho\int\limits_{\omega} I\cos\vartheta d\omega - j\rho\int\limits_{\omega}\cos\vartheta d\omega = 0, \tag{159}$$

a tedy

$$c\frac{dP_r}{dR} - \frac{1}{R}\int\limits_{\omega} \frac{\partial I}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta d\omega + \kappa\rho H \tag{160}$$

$$-2j\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta d\varphi = 0. \tag{161}$$

Poslední člen této rovnice je roven nule, neboť

$$\frac{\partial\sin^2\vartheta}{\partial\vartheta} = 2\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{162}$$

Zbývá nám proto upravit druhý člen rovnice (159). Je zřejmě

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}(I\sin\vartheta\cos\vartheta) = \tag{163}$$

$$\frac{\partial I}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta + I\cos^2\vartheta - I\sin^2\vartheta = \tag{164}$$

$$\frac{\partial I}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta - 2I\cos^2\vartheta + I. \tag{165}$$

Druhý člen rovnice (159) lze tedy přepsat do tvaru

$$\frac{1}{R}\int\limits_{\omega} \frac{\partial I}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta d\omega = \tag{166}$$

$$\frac{1}{R}(\int\limits_{\omega} \frac{\partial}{\partial\vartheta}(I\sin\vartheta\cos\vartheta)d\omega - 2cP_r + cu). \tag{167}$$

Protože

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}([I\sin\vartheta\cos\vartheta]\sin\vartheta) = \tag{168}$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}(I\sin\vartheta\cos\vartheta)\sin\vartheta + I\sin\vartheta\cos^2\vartheta, \tag{169}$$

můžeme dále přepsat integrál na pravé straně rovnice (167)

$$\int\limits_\omega \frac{\partial}{\partial\vartheta}(I\sin\vartheta\cos\vartheta)d\omega = \tag{170}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(I\sin\vartheta\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \tag{171}$$

$$\int_0^{2\pi}[I\sin^2\vartheta\cos\vartheta]_0^\pi d\varphi - \int\limits_\omega I\cos^2\vartheta d\omega. \tag{172}$$

Dosazením do (159) a (167) tedy konečně dostáváme

$$\frac{dP_r}{dR} + \frac{1}{R}(3P_r - u) + \frac{\rho\kappa}{c}H = 0. \tag{173}$$

K řešení je třeba ještě třetí vztah. Protože pole záření uvnitř hvězdy je velmi blízké isotropnímu, lze intensitu rozvinout v řadu

$$I = I_0 + I_1\cos\vartheta + I_2\cos^2\vartheta + ... \tag{174}$$

a lze dokázat (viz Schwarzschild 1958), že již člen I_2 je o 20 řádů menší než I_0, takže jej lze pro všechny praktické účely zcela zanedbat. Dosadíme-li proto do definic (141), (142) a (146) pro hustotu, tok a tlak záření výraz $I = I_0 + I_1\cos\vartheta$, dostáváme

$$u = \frac{1}{c}\int_\omega I_0 d\omega + \frac{1}{c}\int_\omega I_1\cos\vartheta d\omega = \tag{175}$$

$$\frac{4\pi}{c}I_0 + \frac{\pi}{c}I_1\int_0^\pi 2\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{c}I_0. \tag{176}$$

Analogicky

$$H = \int_\omega I_0\cos\vartheta d\omega + \int_\omega I_1\cos^2\vartheta d\omega \tag{177}$$

$$= I_1\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \sin\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta d\varphi \tag{178}$$

$$= I_1\frac{2\pi}{3}[-\cos^3\vartheta]_{\vartheta=0}^\pi = \frac{4\pi}{3}I_1 \tag{179}$$

a

$$P_r = \frac{1}{c}\int I_0 \cos^2\vartheta d\omega + \frac{1}{c}\int I_1 \cos^3\vartheta d\omega = \frac{4\pi}{3c}I_0. \tag{180}$$

Z toho tedy plyne, že

$$P_r = \frac{1}{3}u. \tag{181}$$

Protože v nitru existuje lokální termodynamická rovnováha, lze pro vyjádření emisního koeficientu využít Kirchoffův zákon a psát

$$j = \frac{\sigma}{\pi}T^4\kappa + E, \tag{182}$$

kde $E = E_{nuk.} - T\frac{dS}{dt}$ představuje součet nukleární, gravitační a vnitřní energie uvolňované za jednotku času v jednotce hmoty. Pro celkový tok energie povrchem koule obsahující hmotu M_R zřejmě platí

$$L_R = 4\pi R^2 H, \frac{dL_R}{dR} = 8\pi RH + 4\pi R^2\frac{dH}{dR} \tag{183}$$

a tedy

$$\frac{dH}{dR} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{dL_R}{dR} - \frac{2H}{R} = \rho\frac{dL_R}{dM_R} - \frac{2H}{R}. \tag{184}$$

Rovnici (157) lze s použitím rovnice (122) tedy přepsat do tvaru

$$\rho E - \frac{2H}{R} + \frac{2H}{R} + c\kappa\rho u - 4\rho\sigma T^4\kappa - \rho E = 0, \tag{185}$$

což po úpravě vede na vztah

$$u = \frac{4\sigma}{c}T^4 = aT^4. \tag{186}$$

Dosazením do rovnice (181) tedy dostáváme výraz pro tlak záření

$$P_r = \frac{a}{3}T^4, \tag{187}$$

který jsme již (bez odvození) použili v oddílu věnovaném stavové rovnici hvězdné látky – viz rovnice (33).

Dosazením do (173) dostaneme

$$\frac{4a}{3}T^3\frac{dT}{dR}+\frac{1}{R}(aT^4-aT^4)+\frac{\rho\kappa}{4\pi cR^2}L_R=0, \tag{188}$$

což lze ještě s využitím vztahu (68) upravit na tvar

$$\frac{dT}{dM_R}=\frac{3\kappa L_R}{64ac\pi^2T^3R^4}. \tag{189}$$

To je rovnice zářivé rovnováhy.

Pro úplnost uveďme, že vztah (186) lze ze vztahu (181) odvodit s využitím 1. věty termodynamické. Pro vnitřní energii záření absolutně černého tělesa U_r lze pomocí hustoty energie a objemu psát $U_r=u(T).V$, takže s využitím (181) je

$$TdS = dU_r+P_rdV=udV+Vdu+\frac{1}{3}udV \tag{190}$$

$$= \frac{4}{3}udV+V\frac{du}{dT}dT. \tag{191}$$

Pro diferenciál entropie platí tedy

$$dS=\frac{4u}{3T}dV+\frac{V}{T}\frac{du}{dT}dT. \tag{192}$$

Entropie má úplný diferenciál a je tedy

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial S}{\partial V}=\frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial S}{\partial T}, \tag{193}$$

takže

$$\frac{4}{3T}\frac{du}{dT}-\frac{4u}{3T^2}=\frac{1}{T}\frac{du}{dT}, \tag{194}$$

což lze ještě psát jako

$$\frac{du}{u}=4\frac{dT}{T} \tag{195}$$

a po integraci

$$\ln u=4\ln T+\ln a, \tag{196}$$

což je ale vztah (186).

Závěrem tohoto oddílu se ještě naznačíme, jak se vhodným způsobem počítá koeficient zářivé difuse vhodně středovaný přes všechny frekvence elektromagnetického záření, t.zv. Rosselandova střední opacita. Z rovnic (173) a (181) plyne vztah

$$H = -\frac{c}{3\rho\kappa}\frac{du}{dR} \tag{197}$$

a je možno uvážit, že celý postup, který jsme k odvození použili, by bylo možno provést i pro monochromatické veličiny intenzity, hustoty a toku záření. Je proto možno analogicky psát

$$H_\nu = -\frac{c}{3\rho\kappa_\nu}\frac{du_\nu}{dR}. \tag{198}$$

Vzhledem k tomu, že v nitrech hvězd je velmi přesně splněna podmínka lokální termodynamické rovnováhy, lze monochromatickou hustotu záření velmi dobře aproximovat Planckovou funkcí a psát

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c}B_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{199}$$

Celkový, integrální tok záření můžeme z (198) získat integrací přes všechny frekvence, což lze formálně zapsat jako

$$\begin{aligned} H &= -\frac{c}{3\rho}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{du_\nu}{dR}d\nu \\ &= -\frac{c}{3\rho}\frac{du}{dR}\frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{du_\nu}{dR}d\nu}{\int_0^\infty \frac{du_\nu}{dR}d\nu}. \end{aligned} \tag{200}$$

Chceme-li, aby tato rovnice odpovídala rovnici (197) pro integrální tok záření, pak zřejmě musí pro integrální koeficient opacity platit

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{du_\nu}{dT}\frac{dT}{dR}d\nu}{\int_0^\infty \frac{du_\nu}{dR}\frac{dT}{dR}d\nu}$$

$$= \frac{\int\limits_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}{\int\limits_0^\infty \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}. \tag{201}$$

To je výraz pro Rosselandovu střední opacitu.

3.4.2 Rovnice konvektivního přenosu energie

Zkoumejme nyní, kdy je zářivá rovnováha stabilní, a kdy se změní v rovnováhu konvektivní. Předpokládejme, že v nějakém elementu hmoty ve vzdálenosti R od centra hvězdy vzroste náhodnou fluktuací teplota z hodnoty T na T' a označme rozdíl teplot $\triangle T = T' - T > 0$. Dále předpokládejme, že element bude v důsledku zvýšení teploty adiabaticky expandovat. Stane se tak lehčím a bude nadnášen směrem vzhůru, až se přemístí o vzdálenost dR do místa, kde se *hustota a tlak v něm* vyrovnají s okolním prostředím. Element bude v tom okamžiku mít teplotu

$$T'' = T' + \left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad} dR = T + \triangle T + \left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad} dR. \tag{202}$$

Jestliže v daném místě ve hvězdě dosud panovala zářivá rovnováha, můžeme teplotu prostředí ve vzdálenosti $R + dR$ od centra vyjádřit jako

$$T_r = T + \left(\frac{dT}{dR}\right)_{rad} dR. \tag{203}$$

Mohou nastat tři případy.

1. Po přemístění elementu o vzdálenost dR bude $T'' = T_r$. V tom případě element splyne s okolím. Podmínkou pro to je vztah

$$0 < \triangle T = [\left(\frac{dT}{dR}\right)_{rad} - \left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad}] dR \tag{204}$$

neboli

$$-\left(\frac{dT}{dR}\right)_{rad} < -\left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad}. \tag{205}$$

2. Druhou možností je, že po přemístění elementu o dR bude $T'' > T_r$, tedy

$$\triangle T + \left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad} dR > \left(\frac{dT}{dR}\right)_{rad} dR \tag{206}$$

neboli

$$-\left(\frac{dT}{dR}\right)_{rad} \geq -\left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad}. \tag{207}$$

3. Konečně třetí možností je, že po přemístění elementu o dR bude $T'' < T_r$. V tom případě se element bude adiabaticky smršťovat, klesne zpět, počáteční náhodná fluktuace zanikne a zářivá rovnováha se v daném místě udrží.

Podmínkou vzniku konvektivní rovnováhy je tedy nerovnost (207). Pokusme se ji vyjadřit pomocí známých stavových veličin. Konkrétní výraz pro levou stranu nerovnosti (207) lze získat přímo z rovnice zářivé rovnováhy (189). Výraz pro pravou stranu nerovnosti (207) odvodíme s využitím 1. věty termodynamické, kterou jsme již dříve zapsali ve tvaru

$$TdS = dU + PdV = dU - \frac{P}{\rho^2} d\rho. \tag{208}$$

Při rozkladu změn vnitřní energie podle vztahu (124) můžeme předpokládat $d\mu = 0$, neboť Kato (1966) ukázal, že podmínka konvektivní rovnováhy odvozená bez ohledu na změny střední molekulové hmotnosti částic je *silnější* než podmínka odvozená obecně. Toto zanedbání se ovšem nečiní v rovnici tepelné rovnováhy (122). Diferenciály v rovnici (208) vyjádříme pomocí tlaku P a teploty T, takže dostaneme

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP, \tag{209}$$

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T dP, \tag{210}$$

a po dosazení do vztahu (208)

$$dS = \left(\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial U}{\partial P} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{T}. \tag{211}$$

Využijeme-li nyní opět faktu, že entropie má úplný diferenciál, můžeme napsat podmínku záměnnosti derivací

$$\frac{\partial}{\partial P}(\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}-\frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P)=\frac{\partial}{\partial T}(\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial P}-\frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T), \qquad (212)$$

což lze ještě za předpokladu záměnnosti druhých derivací vnitřní energie a hustoty upravit na tvar

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T-\frac{P}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T=\frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P. \qquad (213)$$

Označíme-li ještě

$$\delta=-\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P, \qquad (214)$$

přejde rovnice (211) do tvaru

$$TdS=dQ=(\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P+\frac{P\delta}{\rho T})dT-\frac{\delta}{\rho}dP. \qquad (215)$$

Využijeme-li definice specifického tepla a rovnice (215)

$$c_P=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P+\frac{P\delta}{\rho T}, \qquad (216)$$

dostáváme konečně

$$TdS=dQ=c_P dT-\frac{\delta}{\rho}dP. \qquad (217)$$

Někteří autoři tento vztah používají i na pravé straně rovnice tepelné rovnováhy. S ohledem na zanedbání členů s $d\mu$ se tím ale dopouštějí chyby, která může hrát roli zejména u modelů s hlubokými podpovrchovými konvektivními zónami. Pro praktický výpočet je třeba použít pro veličiny c_P a δ konkrétní výrazy zavisející m.j. i na použité stavové rovnici.

Zde se omezíme na obecnou formulaci. Pro adiabatický děj (dS=0) přejde (217) na

$$c_P dT=\delta\rho^{-1}dP, \qquad (218)$$

takže

$$\left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad} = \frac{\delta}{c_P \rho} \frac{dP}{dR}. \tag{219}$$

S pomocí rovnic hydrostatické a zářivé rovnováhy (71) a (189) můžeme tedy nerovnost (207) psát ve tvaru

$$\frac{3\kappa\rho L_R}{16\pi ac R^2 T^3} \geq \frac{\delta G M_R}{c_P R^2} \tag{220}$$

nebo po úpravě a zavedení symbolu

$$\nabla = \frac{d\ln T}{d\ln P} \tag{221}$$

lze podmínku konvektivní rovnováhy zapsat jednoduše jako

$$\nabla_{rad} \geq \nabla_{ad}. \tag{222}$$

Konkrétní výrazy jsou

$$\nabla_{rad} = \frac{3\kappa P L_R}{16\pi ac G M_R T^4}, \tag{223}$$

$$\nabla_{ad} = \frac{\delta P}{c_P \rho T}. \tag{224}$$

Výhodou tohoto zápisu je, že rovnice zářivé a konvektivní rovnováhy nabudou formálně stejného tvaru

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{G T M_R}{4\pi P R^4} \nabla, \tag{225}$$

kde $\nabla = \nabla_{rad}$ v oblastech, kde není splněna podmínka (222), a $\nabla = \nabla_{konv}$ tam, kde splněna je. Ze současné teorie konvekce plyne, že asi v 95-98 % hmoty hvězdy je konvekce adiabatická a tedy $\nabla_{konv} = \nabla_{ad}$. V podpovrchových vrstvách se používá semiempirická teorie konvekce, ve které vystupuje parametr charakterizující poměr mezi střední volnou dráhou konvektivního elementu a jeho rozměrem. Obvykle se empiricky tato hodnota volí, typicky 1 - 2.

4 Matematická struktura rovnic hvězdného nitra

V rámci sférických jednorozměrných modelů hvězdného nitra můžeme na celou úlohu hledět tak, že máme dvě nezávisle proměnné: První je buď geometrická souřadnice nebo nějaká zobecněná souřadnice, např. hmota M_R obsažená ve sférické slupce o poloměru R, kterou jsme zde použili. Druhou nezávisle proměnnou je vývojový čas modelu t. Viděli jsme, že vlastnosti hvězdné látky jsou vesměs funkcemi teploty, hustoty (nebo tlaku, který je s hustotou a teplotou svázán pomocí stavové rovnice) a chemického složení. Závislými proměnnými jsou teplota, tlak, zářivý výkon, poloměr slupky o hmotě M_R a ovšem chemické složení. Časová závislost se projevuje explicitně v rovnici tepelné rovnováhy (122). Chemické složení má určitým způsobem výjimečné postavení v tom, že jeho změny lze počítat explicitně. Omezíme-li se na nukleární přeměny vodíku a helia, lze např. pro časovou změnu helia psát

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_i \alpha_i E_i, \tag{226}$$

kde koeficienty α_i zjevně označují převrácenou hodnotu množství energie vzniklé úplnou nukleární přeměnou 1 g látky v té které reakci (koeficient pro nukleární spalování helia bude mít přirozeně v daném případě opačné znaménko, než reakce spalování vodíku na helium), a E_i jsou energetické vydatnosti jednotlivých reakcí. Pro každé místo ve hvězdě proto můžeme (při zanedbání vyšších členů) psát

$$Y(M_R, t + \triangle t) = Y(M_R, t) + \frac{\partial Y}{\partial t} \triangle t. \tag{227}$$

V oblastech konvektivních zón je ještě třeba takto získané veličiny homogenizovat s ohledem na účinné promíchávání. V každé konvektivní zóně bude obsah helia Y_K homogenní a bude dán vztahem

$$Y_K(t + \triangle t) = \frac{\int_K Y(M_R, t + \triangle t) dM_R}{\int_K dM_R}. \tag{228}$$

Protože v oblastech spalování vodíku musí všude zůstávat konstantní součet relativního množství vodíku a helia a též obsah uhlíku, a protože v oblastech spalování helia platí

$$X = 0, \quad Y + X_C = konst., \tag{229}$$

lze pomocí změn relativního obsahu helia Y všude snadno spočítat i změny ostatních elementů.

Pokud nás zajímá detailní chemický vývoj jednotlivých isotopů, je přirozeně možné rozepsat zvlášť jednotlivé části jaderných reakcí a sledovat změny všech isotopů pomocí většího počtu analogických rovnic.

5 Okrajové podmínky

Ačkoliv nám příroda při poznávání dějů a jejich příčin obvykle háže klacky pod nohy, v případě hvězdných modelů byla milosrdná v tom smyslu, že se ukazuje, že protohvězda po svém vzniku v molekulárním mračnu projde při smršťování stádiem, kdy je prakticky celá ve stavu konvektivní rovnováhy. To znamená, že jedna okrajová podmínka je nečekaně jednoduchá: můžeme předpokládat, že na počátku nukleárního vývoje je hvězda **chemicky homogenní**, a přijmout chemické složení pozorované v atmosféře normálních hvězd jako výchozí. Často se přijímá chemické složení Slunce, konkrétně

$$X = 0,70 - 0,71, \quad Y = 0,27 - 0,28, \quad Z = 0,02.$$

Pro výchozí model je též možno předpokládat, že je zcela stacionární, a brát tudíž v rovnici (122)

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{230}$$

v celé hvězdě.

Nyní uvažujme okrajové podmínky ve druhé nezavisle proměnné t.j. v rámci jednoho daného modelu. V centru je zřejmě

$$L_R = 0, \quad R = 0. \tag{231}$$

Tyto okrajové podmínky vedou k singularitě základních rovnic. V blízkosti centra hvězdy proto použijeme lineární aproximaci, v zásadě rozvoj se zanedbáním členů vyšších řádů. Pro hmotu obsaženou v kouli o poloměru R lze v blízkosti centra přibližně psát

$$M_R = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_c, \tag{232}$$

$$(\int_0^{M_R} dM_R = \int_0^{M_R} 4\pi R^2 \rho_c dR) \tag{233}$$

takže místo rovnice kontinuity (68) dostáváme

$$R = \left(\frac{3M_R}{4\pi\rho_c}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{234}$$

Rovnice tepelné rovnováhy (122) přejde zřejmě do tvaru

$$L_R = \left(E_{nuk_c} - T_c \frac{dS_c}{dt}\right) M_R. \tag{235}$$

Zbylé dvě rovnice přejdou do tvaru

$$\begin{aligned} P &= P_c - \int \frac{GM_R}{4\pi} \frac{dM_R}{R^4} = \\ &= P_c - \int \frac{GM_R}{4\pi} \left(\frac{4\pi\rho_c}{3}\right)^{\frac{4}{3}} \frac{dM_R}{M_R^{\frac{4}{3}}} = \\ &= P_c - \int \frac{G}{4\pi} \left(\frac{4\pi\rho_c}{3}\right)^{\frac{4}{3}} M_R^{-\frac{1}{3}} dM_R = \\ &= P_c - \frac{G}{2} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} M_R^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \tag{236}$$

a analogicky

$$T = T_c - \frac{G}{2} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} M_R^{\frac{2}{3}} T_c \nabla_c P_c^{-1}. \tag{237}$$

Konstrukce okrajových podmínek na povrchu hvězdy je poněkud složitější, protože by bylo příliš hrubé předpokládat na povrchu hvězdy nulový tlak a teplotu. Obvykle se místo toho počítá zjednodušený model povrchových částí hvězdy, přičemž se uvažují dvě různé vrstvy: fotosféra a podfotosférické vrstvy, ve kterých je materiál ještě ve stavu neúplné ionizace a kde nelze konvekci považovat za adiabatickou. Podfotosférické vrstvy obsahují obvykle pouze 2 –

5 procent hmoty hvězdy, ale často více než polovinu jejího celkového objemu.

Ve fotosféře, jejíž celková hmotnost i rozměry jsou již zanedbatelné, se obvykle jako nezávisle proměnná volí optická hloubka τ, která se zavádí pomocí vztahu

$$d\tau = \kappa \rho dx, \tag{238}$$

kde x označuje geometrickou hloubku uvažovaného místa ve fotosféře měřenou od "vnějšího okraje" fotosféry směrem do středu hvězdy. Pro průběh teploty s optickou hloubkou lze použít aproximační vztah založený na některém zcela jednoduchém nebo poněkud složitějším modelu atmosféry. Pro nejjednodušší model lze psát

$$T^4 = \frac{1}{2} T_{eff}^4 (1 + \frac{3}{2}\tau). \tag{239}$$

(Všimněme si, že z uvedeného vztahu vyplývá, že teplota v optické hlobce 2/3 se právě rovná efektivní teplotě hvězdy.) Složitější a přesnější vztahy pro průběh teploty s optickou hloubkou lze nalézt na př. v pracech Böhm-Vitense (1958) či Ando a Osaki (1975).

Pro změnu tlaku plynu lze psát

$$dP_g = g\rho dx, \tag{240}$$

kde $g = GM_* R_*^{-2}$ je gravitační zrychlení na povrchu hvězdy. Po zavedení optické hloubky lze psát $dP_g = g\kappa^{-1} d\tau$. Podle Unsölda (1955) je třeba tíhové zrychlení korigovat s ohledem na tlak záření podle vztahu

$$g_{\text{eff}} = g - \sigma \kappa c^{-1} T_{\text{eff}}^4, \tag{241}$$

takže průběh tlaku plynu ve fotosféře můžeme počítat podle rovnice

$$\frac{dP_g}{d\tau} = \frac{g_{\text{eff}}}{\kappa}. \tag{242}$$

Je zřejmé, že výraz pro efektivní tíhové zrychlení je založen na vztahu (239) pro nejjednodušší atmosféru. Podle (181) a (186) platí totiž

$$dP_r = \frac{4}{3} a T^3 dT = \frac{16\sigma}{3c} T^3 dT. \tag{243}$$

Diferencováním vztahu (239) dostáváme

$$4T^3 dT = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 d\tau, \tag{244}$$

takže

$$dP_r = \sigma c^{-1} T_{\text{eff}}^4 d\tau. \tag{245}$$

Odtud je již výraz (241) pro efektivní tíhové zrychlení nasnadě.

Je dobře si uvědomit, že pokud pro průběh teploty s optickou hloubkou použijeme nějaký dokonalejší model atmosféry, je nutné použít i příslušně modifikovaný výraz pro korekci tíhového zrychlení o tlak záření v rovnici (241).

S využitím interpolace v tabulkách opacitních koeficientů (připomeňme si, že $\kappa = \kappa(\rho, T)$) je možno rovnici (239) a rovnici (242) či její dokonalejší tvar řešit numericky od optické hloubky 0 až do dolní hranice fotosféry t.j. pro $\tau = \frac{2}{3}$. (Někteří autoři doporučují ukončit řešení až u $\tau = 2$.) Pro optickou hloubku 0 se obvykle volí nějaká velmi malá, ale nenulová hustota ρ, např. 10^{-6} kg m^{-3}. Na dolní hranici fotosféry bude

$$T = T_{\tau=\frac{2}{3}}, \tag{246}$$

$$P = P_{\tau=\frac{2}{3}} = P_{g_{\tau=\frac{2}{3}}} + \frac{a}{3} T^4_{\tau=\frac{2}{3}}. \tag{247}$$

Z definice efektivní teploty ještě plyne

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{eff}^4 = \pi a c R_*^2 T_{eff}^4, \tag{248}$$

takže

$$R_* = T_{eff}^{-2} \left(\frac{L_*}{\pi a c} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{249}$$

Výpočet pro podfotosférické vrstvy se obvykle ještě zjednodušuje tím, že se předpokládá, že zářivý tok L_R se v těchto oblastech s malou hmotou a mimo zónu nukleární přeměny prakticky nemění a rovnice tepelné rovnováhy se ze soustavy rovnic vypouští. Z výpočetních důvodů se ukazuje výhodné volit v těchto oblastech za nezávisle proměnnou tlak, neboť hmota se mění velmi málo. Rovnice hvězdné stavby proto nabudou tvar

$$\frac{dM_R}{dP} = -\frac{4\pi R^4}{GM_R} \tag{250}$$

$$\frac{dR}{dP} = \frac{dR}{dM_R}\frac{dM_R}{dP} = -\frac{R^2}{\rho G M_R} \tag{251}$$

$$\frac{dT}{dP} = \frac{dT}{dM_R}\frac{dM_R}{dP} = \frac{T}{P}\nabla \tag{252}$$

Tyto rovnice se obvykle numericky integrují (např. metodou Runge-Kutta) od povrchu až do $M_R/M_* = 0,97$, kde již můžeme předpokládat, že je hvězdný materiál zcela ionizován.

6 Henyeova metoda integrace vnitřních částí hvězdy

V současnosti se k řešení rovnic vnitřní stavby hvězd nejčastěji užívá metoda kompletní linearizace rovnic, kterou poprvé navrhli Henyey a spol. (1959) a která se později začala používat i k výpočtu modelů atmosfér.

6.1 Metoda úplné linearizace

Princip celého postupu je následující: Celé nitro hvězdy rozdělíme na dostatečný počet koncentrických slupek a v každé na počátku zvolíme nějaké přibližné hodnoty veličin R, L, P a T. Předpokládejme, že budeme tyto slupky číslovat směrem od povrchu do centra. Iterační výpočet pak probíhá následovně: Povrchovou integraci až do místa, kde je $M_R/M_* = 0,97$, provedeme pro tři různé hodnoty efektivní teploty a svítivosti v okolí očekávané polohy modelu v Hetzsprungově-Russellově diagramu. Jestliže hodnoty závislých proměnných v místě s $M_R/M_* = 0,97$ označíme indexem 1, lze z oněch tří integrací určit koeficienty α, β a γ lineární formy

$$R_1 = \alpha_1 P_1 + \beta_1 T_1 + \gamma_1, \tag{253}$$

$$L_1 = \alpha_2 P_1 + \beta_2 T_1 + \gamma_2, \tag{254}$$

jimiž aproximujeme skutečné funkční závislosti

$$\begin{aligned} R_1 &= f_1(P_1, T_1), & (255) \\ L_1 &= f_2(P_1, T_1). & (256) \end{aligned}$$

Diferenciální rovnice stavby nahradíme rovnicemi diferenčními pro každou dvojici slupek, čili místo derivací píšeme např. pro J-tou a (J+1)-ní slupku

$$\frac{R_{J+1} - R_J}{M_{R_{J+1}} - M_{R_J}} \qquad (257)$$

a výrazy na pravých stranách rovnic vypočteme pro průměrné hodnoty mezi J-tou a (J+1) slupkou. Jestliže ony čtyři diferenční rovnice upravíme převedením všech členů na levou stranu do tvaru

$$G_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \qquad (258)$$

pak tyto rovnice musí být splněny všude a můžeme proto pro opravy výchozích hodnot R, L, P a T napsat soustavu čtyř lineárních nehomogenních rovnic

$$\begin{aligned} G_i &+ dG_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4), & (259) \\ dG_i &= \frac{\partial G_i}{\partial R_J} \triangle R_J + \frac{\partial G_i}{\partial L_J} \triangle L_J + ... + \frac{\partial G_i}{\partial T_{J+1}} \triangle T_{J+1} & (260) \end{aligned}$$

o osmi neznámých

$$\begin{aligned} \triangle & R_J, \triangle L_J, \triangle P_J, \triangle T_J, & (261) \\ \triangle & R_{J+1}, \triangle L_{J+1}, \triangle P_{J+1}, \triangle T_{J+1}. & (262) \end{aligned}$$

Analogickou úpravou rovnic (254) a diferencováním dostaneme další dvě rovnice, které představují linearizované okrajové podmínky na horní hranici podpovrchových vrstev hvězdy:

$$\begin{aligned} \triangle R_1 &= \alpha_1 \triangle P_1 + \beta_1 \triangle T_1 - R_1 + \alpha_1 P_1 + \beta_1 T_1 + \gamma_1, & (263) \\ \triangle L_1 &= \alpha_2 \triangle P_1 + \beta_2 \triangle T_1 - L_1 + \alpha_2 P_1 + \beta_2 T_1 + \gamma_2. & (264) \end{aligned}$$

Pomocí těchto vztahů můžeme eliminovat neznámé $\triangle R_1$ a $\triangle L_1$ z rovnic (260) pro první a druhou slupku a získáme tak 4 rovnice pro 6 neznámých, tedy opět dvě z nich můžeme vyjadřit jako lineární funkcí zbylých čtyř neznámých, dosadit do rovnic pro druhou a třetí slupku a tak postupovat až do centra hvězdy. Rovnice (260) pro (N-1)-ní a N-tou (centrální) slupku budou ovšem obsahovat pouze 6 neznámých, neboť $R_c = 0$ a $L_c = 0$. Po dosazení dvou veličin z předchozí dvojice slupek proto v centru získáme soustavu 4 lineárních rovnic pro 4 neznámé. Po jejím vyřešení dosazujeme postupně získané veličiny oprav zpět do odpovídajících rovnic, ve kterých jsme vždy dvě neznámé z předchozí vyšší slupky učinili funkcemi čtyř neznámých ze slupky následující. Tak postupně získáme všech 4N+2 neznámých. Tyto vypočtené opravy přičteme k příslušným veličinám v celém modelu. Ze vztahu (249) můžeme rovněž spočítat efektivní teplotu opraveného modelu. Pokud se efektivní teplota a zářivý výkon dostanou mimo meze dané třemi zkusmými integracemi z fotosféry až k horní hranici podpovrchových vrstev, musíme zvolit opravené hodnoty a jednu či dvě integrace opakovat. Poté můžeme celý postup s opravenými hodnotami všech veličin opakovat, a to do té doby, než všechny opravy závisle proměnných ve všech slupkách neklesnou pod mez přesnosti, kterou budeme požadovat.

Pokud počítáme vývoj hvězdy t.j. časovou posloupnost modelů, zvolíme ještě časový krok mezi dvěma modely a před každou iterací ještě ve všech slupkách spočteme nové chemické složení podle vztahu

$$Y_i(t + dt) = Y_i(t) + 0,5(\frac{\partial Y_i(t)}{\partial t} + \frac{\partial Y_i(t + dt)}{\partial t}), \qquad (265)$$

přičemž v konvektivních zónách se poté provede středování podle vztahu (228).

6.2 Meze linearizace

Je poučné učinit si představu o tom, jak zdárně lze linearizaci diferenciálních vztahů vést do extrému. Vezměme si pro příklad rovnici hydrostatické rovnováhy ve tvaru

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{GM_R\rho}{R^2}. \qquad (266)$$

Jestliže budeme derivaci na levé straně nahrazovat diferencí mezi centrem a povrchem (rozdělíme hvězdu na pouhé dvě slupky), do-

Tabulka 1: Srovnání spočteného centrálního tlaku s odhadem

Hmota hvězdy ($M_\odot$)	log P_c (model) [CGS]	log P_c (odhad) [CGS]
1 (nyní)	17,356	15,128
7	16,609	14,709
25	16,275	14,518

stáváme

$$\frac{P_c - 0}{0 - R_*} = -\left(\frac{GM_R}{R^2}\right)_{\text{střední}} \rho_{\text{střední}} = -\frac{3M_*}{4\pi R_*^3}\frac{1}{2}\frac{GM_*}{R_*^2}, \tag{267}$$

s přihlédnutím k tomu, že pro gravitační zrychlení v centru platí

$$g_c = lim_{R\to 0}\frac{GM_R}{R^2} = \frac{4\pi}{3}GR\rho_c = 0. \tag{268}$$

Po úpravě dostáváme tedy následující odhad centrálního tlaku ve hvězdě:

$$P_c = \frac{3GM_*^2}{8\pi R_*^4}. \tag{269}$$

Dosadíme-li hodnoty pro Slunce, dostáváme tlak asi $1,34 \times 10^{15}$ [CGS], zatímco z modelu Slunce vychází hodnota $2,269\times 10^{17}$ [CGS]. Dostáváme tedy dosti velký rozdíl. V tabulce je srovnání modelu a odhadu pro několik hmotností hvězdy. Je zajímavé, že vztah mezi logaritmem tlaku spočteným a odhadnutým je skoro dokonale lineární. Vidíme, že odhad vede k poklesu centrálního tlaku s rostoucí hmotností hvězdy, ve shodě s tím, co dávají reálné modely. Velmi sportovně řečeno: jakýsi odhad toho, že tlak v nitru je hodně vysoký, pomocí i tak hrubé linearizace dostáváme, a dokonce můžeme správně kvalitativně odhadnout, jak se mění v závislosti na hmotnosti hvězdy.

7 Vývoj osamocené hvězdy

Podle současných představ vznikají hvězdy z náhodného zhuštění chladné mezihvězdné látky v obřích molekulových mračnech. Tyto procesy jsou dnes předmětem intenzivního výzkumu, a to i v souvislosti s rozvojem pozorovacích technik, které přímá pozorování chladné hmoty dovolují. Je zřejmé, že se jedná o obecně nesférický problém a složitější fyziku, než jakou jsme při odvozování rovnic staby hvězd předpokládali.

Ale i poté, když již můžeme platnost rovnic hvězdné stavby předpokládat, je výklad hvězdného vývoje a jeho detailních příčin obtížný, protože se jedná o rovnice diferenciální a funkční závislosti stavových veličin na teplotě a tlaku jsou vesměs velmi komplikované.

V jisté chvíli se původně náhodné zhuštění začne dále smršťovat již díky vlastní gravitaci a vznikající protohvězda projde stadiem, kdy se v celém tělese ustaví konvektivní rovnováha, takže se chemické složení hvězdy homogenizuje. S rostoucí hustotou roste i opacita a teplota v nitru, až se v nitru zažehnou první nukleární reakce, nejprve energeticky málo významná slučování lithia, berylia a bóru, ale nakonec primární slučování vodíku na helium. Uvolňovaná jaderná energie je zčásti vyzářena, zčásti je pohlcena; to vede k růstu centrální teploty, hustoty a tlaku. Protože nukleární produkce energie je funkcí vysoké mocniny teploty a je přímo úměrná hustotě, vede rozdíl podmínek od místa k místu i k ustavení potřebného *gradientu* tlaku a k dosažení stavu hydrostatické rovnováhy.

POZOR, je třeba vždy mít na paměti, že je to gradient tlaku, nikoliv tlak sám, co působí proti síle přitažlivosti. Chybná tvrzení na toto téma se občas objevují i u renomovaných autorů.

Okamžik ustavení hydrostatické rovnováhy bývá obvykle ztotožňován s polohou hvězdy v HR diagramu na t.zv. hlavní posloupnosti nulového věku. Poloha hvězdy je jednoznačně dána její hmotností a počátečním chemickým složením.

7.1 Ilustrativní příklad: vývoj hvězdy o hmotě 4 $M_\odot$

Popišme si jako ilustrativní příklad vývoj hvězdy s počátečním chemickým složením mladých hvězd v Galaxii, $X = 0,602$, $X_N = 0,014$ a $Z = 0,044$. U této hvězdy hraje již rozhodující roli CNO cyklus jaderné přeměny. V centru hvězdy a jeho okolí se již při dosažení hydrostatické rovnováhy vytvoří konvektivní zóna, která zahrnuje 18 % celkové hmotnosti hvězdy. Primární příčinou vývoje hvězdy je jaderné slučovaná vodíku. Díky němu postupně v centrálních částach ubývá vodíku a přibývá helia. Na produkci nukleární energie to má dlouho jen malý vliv díky účinnému promíchávání v konvektivní zóně, které do centra hvězdy přináší stále nový materiál bohatý na vodík. Úbytek vodíku má však za následek pokles opacity, která pro dané hustoty a teploty klesá s klesajícím obsahem vodíku. Pokles opacity znamená přirozeně podle rovnice (223) i pokles ∇_{rad} a v důsledku toho se tedy postupně *zmenšuje* hmotnost konvektivního jádra. Zmenšující se konvektivní jádro za sebou tak nechává v jisté oblasti hvězdy zónu plynule se měnícího chemického složení, s klesajícím obsahem vodíku směrem k centru.

Jiným důsledkem nukleárních přeměn v nitru hvězdy je postupný růst střední molekulové hmotnosti částic v konvektivní zóně, což vzhledem ke stavové rovnici vede k mírnému poklesu tlaku s časem. Klesá i gradient tlaku, vnitřní části hvězdy se smršťují a zahřívají, což ovšem zvětšuje výkon nukleární produkce a ve svých důsledcíh i růst střední hmotnosti částic. Po 63 miliónech let (bod 2 v obrázcích) převýší růst teploty růst střední hmotnosti částic a cetrální tlak se počne zvyšovat. Po celou tuto dobu v důsledku růstu produkce energie roste i celkový zářivý výkon na povrchu hvězdy.

Vysvětlit důvody vývoje ostatních povrchových charakteristik je nesnadné, protože se zde kombinuje několik vlivů. Výpočet ukazuje, že rostoucí tok zářivé energie z centra hvězdy způsobuje po dlouhou dobu i pozvolnou expanzi vnějších vrstev, spojenou s poklesem teploty v nich. Klesá i efektivní teplota hvězdy. Až po více než 84 miliónech let se tento pokles teploty zastaví a teplota začíná znovu růst. "Krátce" poté (v čase 86,1 miliónů let) dosáhne poloměr hvězdy lokálního maxima a začíná klesat. To ovšem jen urychlí růst teploty.

Prvotní příčina těchto změn spočívá opět v nitru hvězdy. V té době klesl již relativní hmotnostní obsah vodíku v konvektivní zóně pod 0,04, což se ukazuje jako kritická hodnota. Přitom spotřeba vodíku díky růstu teploty i hustoty stále roste. V čase 88,5 miliónů let klesne obsah vodíku v jádru na hodnotu $X = 0,0015$, což již vede k poklesu výkonu nukleární produkce a v důsledku toho pak i k poklesu centrální teploty.

Pokles produkce je tak prudký, že celá hvězda se začíná smršťovat. To ale vede k růstu hustoty a teploty v oblastech pozměněného chemického složení, které po sobě zanechala k centru ustupující konvektivní zóna. V důsledku toho vznikne nad již téměř heliovým jádrem druhé energerické maximum nukleární přeměny vodíku na helium, *vodíková slupka*. Intensita tohoto zdroje zpočátku velmi rychle roste, takže do vrstev blíže k povrchu přichází více zářivé energie, než kolik se stačí vyzářit, a vnější části hvězdy začínají velmi rychle expandovat (bod 6, t=88,589 miliónů let). Následkem toho dochází k novému poklesu teploty a zpočátku i zářivého výkonu hvězdy.

S poklesem energetické produkce v centru se zmenšuje L_R a tedy i ∇_{rad}, takže po velmi krátké době zanikne centrální konvektivní zóna (bod 7, t=88,618 milionů let). Celá oblast se rychle přizpůsobí stavu zářivé rovnováhy a nastává krátké období relativní stability, ve kterém se do značné míry se zastaví expanze hvězdy i smršťování jádra. (Gravitační energie uvolňovaná v jádru je v té době zhruba o řád menší, než v období zániku konvektivní zóny.)

Jaderné reakce v centru brzo spotřebují i zbývající zásobu vodíku (bod 8, t=90,50 miliónu let), takže dochází k novému prudkému smršťování jádra spojenému s růstem tlaku, hustoty, uvolňování gravitační energie a tedy i růstu centrální teploty. Růst teploty a hustoty naruší i relativně stabilizovanou vodíkovou slupku, ve které nastává nový rychlý růst produkce nukleární energie. To vede k nové expanzi a ochlazování obalu hvězdy. Pokles teploty je rychlejší, než pokles hustoty, opacitní koeficient roste a po určitém čase vede i postupnému poklesu zářivého výkonu hvězdy (bod 9, t=93,5 miliónu let).

Vodíková slupka se neustále zužuje a posouvá směrem k povrchu. Souvisí to s úbytkem vodíku směrem k centru a poklesem teploty a hustoty směrem k povrchu. Produkce energie ve slupce proto zvolna klesá a snižuje se tím pádem i zářivý výkon celé hvězdy.

Pokračující pokles teploty vyvolá pokles ionizace v podfotosférických vrstvách, což vede ke vzniku konvektivní zóny, která se postupně rozšiřuje směrem k centru hvězdy. V tenké vrstvě nad touto konvektivní zónou navíc poklesne opacita, čímž je přenos energie směrem k povrchu usnadněn. Je třeba si připomenout, že zatímco v oblastech se zářivým přenosem energie dochází k expanzi zčásti na úkor pohlcovaného záření, v oblastech konvekce probíhá expanze prakticky adiabaticky, tedy pouze na úkor vnitřní energie. Výsledkem je, že zářivý výkon hvězdy znovu roste a tento růst probíhá tak rychle, jak rychle se dolní hranice konvektivní zóny přibližuje k okraji hořící vodíkové slupky.

Tato nová změna struktury hvězdy vede k růstu teploty a tedy i produkce energie ve vodíkové slupce. To je pozoruhodná situace - poprvé za celý vývoj od hlavní posloupnosti nulového věku jsou pro chování celé hvězdy určující procesy probíhající v jejích podpovrchových vrstvách.

Zářivý výkon hvězdy roste do té doby, než teplota v blízkosti centra hvězdy dosáhne hodnoty 10^8 K. Poté započne v centru hvězdy jaderné slučování helia na uhlík. V centru se opakuje podobná situace jako při zapálení vodíku během kontrakce hvězdy k hlavní posloupnnosti nulového věku. Smršťování jádra se zastaví a v jádru se ustaví stabilní stav, postupně se ovšem vytvoří konvektivní zóna, která při svém zvětšování vede k diskontinuitě chemického složení na vnějším okraji zóny. Hlavním důsledkem však je, že zastavením kontrakce jádra se zhorší podmínky pro slučování vodíku na helium ve vodíkové slupce, která *je i nadále nejvydatnějším energetickým zdrojem hvězdy.* Ač se to zdá poněkud kuriózní, zářivý výkon hvězdy po zažehnutí dalšího zdroje nukleární energie proto začíná *klesat* a její poloměr se zmenšuje. Vzhledem k nižší energetické vydatnosti slučování helia na uhlík, trvá relativně stabilní období hoření helia v jádru hvězdy mnohem kratší dobu, než fáze pobytu hvězdy na hlavní posloupnosti. Po vyčerpání helia v jádru dojde opět analogicky k hoření helia ve heliové slupce. Nyní však dochází již ke dvojité vazbě: jak se nyní uhlíkové jádro smršťuje a zahřívá, dostává se heliová slupka do oblastí s vyšší teplotou a hustotou a zvýšený tok energie z ní vede k expanzi a ochlazování oblasti hoření vodíku ve slupce a tedy ke smrštování hvězdy a poklesu jejího zářivého výkonu. V těchto fázích vstupuje do hry další faktor, který námi uvažované modely dobře nepopisují: únik hmoty ve formě hvězdného větru. (V některých výpočtech se únik hmoty bere v potaz formou parametrického popisu na základě empirických údajů.) Hvězda v důsledku dalších nukleárních reakcí s menší a menší energetickou vydatností stále zrychluje svůj vývoj, což vede k tomu, že je nakonec třeba další vývoj již uvažovat dynamicky, s použitím pohybové rovnice místo rovnice hydrostatické rovnováhy. Dochází k pulsacím obalu hvězdy, v HR diagramu se hvězda pohybuje po velice složité trajektorii v blízkosti asymptotické větve obrů. Může dojít i k odvržení celého vnějšího obalu hvězdy.

Výsledným produktem jaderných reakcí je jádro složené z prvků skupiny železa, jejichž atomová struktura je velmi stabilní. Jeho další smršťování nakonec zastaví elektronová degenerace centrálních částí hvězdy.

Pozdní stádia vývoje vyžadují mnohem složitější modely a jsou v současnosti předmětem intenzivního výzkumu. Pokud nedojde k odvržení obalu v důsledku dynamických nestabilit, spotřebuje se po zastavení kontrakce jádra v důsledku elektronové degenerace zbytek nukleárního paliva v hořících slupkách a celá hvězda se začne smršťovat a skončí jako více či méně kompaktní objekt v blízkosti hlavní posloupnosti čistě heliových hvězd.

7.2 Odlišnosti hvězdného vývoje v závislosti na hmotě hvězdy

Počáteční hmotnost hvězdy je pro celý její vývoj zcela určující. Již z názoru a z toho, co dosud víme, je zřejmé, že hvězdy s vyšší hmotností budou díky větší vlastní gravitaci schopny dosahovat při počáteční kontrakci vyšších centrálních teplot. Vzhledem ke strmé závislosti energetické výtěžnosti jaderných reakcí na teplotě lze proto očekávat, že nukleární vývoj i ostatní fáze vývoje hvězdy se budou s rostoucí hmotností zkracovat. To výpočty také skutečně potvrzují. Popišme se nyní, jak se liší vývoj hvězd v závislosti na jejich počáteční hmotnosti, poněkud podrobněji.

Je-li hmotnost protohvězdy menší než asi 0,075 $M_{\odot}$, nestačí její vlastní přitažlivost k tomu, aby v jejím jádru došlo k řádnému zapálení vodíkové syntézy. Hroucení jádra proto pokračuje, hvězda chabě září na úkor změn potenciální energie a nakonec je smršťování jádra zastaveno jeho narůstající elektronovou degenerací. Hvězdám v tomto stavu se v poslední letech začalo říkat *hnědí trpaslíci* a vyvíjí se velké úsilí je skutečně pozorovat. V jistém smyslu se na tomto konci hmotností dostáváme k filosofické otázce, co ještě považovat za hvězdu. Limitně bychom za hnědého trpaslíčka mohli považovat i největší planetu sluneční soustavy, Jupitera o hmotnosti méně než 0,001 $M_\odot$, u něhož je z měření kosmických sond, které kolem něj prolétly, známo, že zčásti září díky vlastní gravitační energii, nikoliv pouze odraženým světlem Slunce.

U hvězd, jejichž hmotnost nepřevyšuje hmotnost Slunce, probíhá jaderné slučování vodíku na helium téměř výlučně formou proton-protonového cyklu, jehož energetická závislost na teplotě je méně strmá. V důsledku toho v takových hvězdách zaujímá oblast nukleárního slučování relativně větší objem než u hvězd hmotnějších. Kromě toho se u nich *vůbec nevytvoří* centrální konvektivní zóna a nedochází k žádnému výraznému přechodu mezi hořením vodíku v jádru a ve vodíkové slupce. Dlouhé období klidného vývoje tak zahrnuje i dobu hoření vodíku ve slupce. (Z tohoto pohledu lze říci, že si lidstvo pro svou existenci nevybralo tak špatnou centrální hvězdu.)

Pro hvězdy, jejichž hmotnost je menší než asi 0,5 $M_\odot$, navíc elektronová degenerace zastaví kontrakci jejich jádra po vyhoření vodíku dřív, než je dosažena teplota potřebná ke slučování helia na uhlík.

U hvězd s hmotností mezi 1 a 2 $M_\odot$ dochází k jinému zajímavému jevu: během jejich stabilního vývoje po zapálení vodíku v jádru se jejich centrální konvektivní zóna postupně zvětšuje v závislosti na tom, jak se spolu se zvolna rostoucí centrální teplotou stále více na produkci energie podílí i CNO cyklus.

Pro hvězdy s hmotností mezi 0,5 a asi 10 $M_\odot$ můžeme předpokládat, že v pozdějších fázích vývoje ztratí díky dynamickým oscilacím a vlivem hvězdného větru své vnější vrstvy a poté, co se v jejich jádru uplatní elektronová degenerace, končí jako *bílí trpaslíci*, horké a velmi husté hvězdy, skrblící svou zářivou energií a velmi zvolna chladnoucí.

Konečně u hvězd s hmotností větší než asi 10 $M_\odot$ dochází během hoření vodíku v jádru k rozšiřování konvektivní zóny v důsledku značného tlaku záření. Protože v uvažovaném rozsahu teplot a hustot je opacitní koeficient určován především rozptylem na volných elektronech, pro který platí vztah

$$\kappa = 0,19(1 + X), \tag{270}$$

roste opacita s rostoucím obsahem vodíku a vrstvy nad konvektivní zónou se tak stávají vůči konvekci nestabilní. Vytváří se t.zv. semikonvektivní zóna, oblast, ve které dochází pouze k částečnému promíchávání chemických elementů tak, aby v každém místě byla splněna podmínka $\nabla_{rad} = \nabla_{ad}$. V literatuře se rovněž vedou spory o tom, zda nedochází k jevu, který se v angličtině nazývá *convective overshooting*. Jde o to, že pokud je materiál vztlakem nadlehčován a unášen konvekcí vzhůru, může kinetická energie velkých konvektivních elementů způsobit to, že se část materiálu dostane i do míst, kde již podmínka konvektivní rovnováhy splněna není. Tím by se velikost oblasti, ve které dochází k promíchávání materiálu, poněkud zvětšila.

Jak ukázal teoreticky již Chandrasekhar (1938), pokud hmotnost jádra složeného z prvků skupiny železa překročí 1,4 $M_\odot$, stačí již jeho vlastní přitažlivost k tomu, aby překonala gradient tlaku vzniklý elektronovou degenerací, dochází k dezintegraci atomových jader a vzniká neutronové jádro. Kolaps jádra je provázen prudkým uvolněním obrovského množství energie, což vede k odmrštění celého obalu rychlostmi, které překonávají rychlost únikovou, do okolního prostoru.

V Galaxii extrémně vzácné hvězdy s počateční hmotností nad asi 50 $M_\odot$ by mohly v závěrečných fázích vývoje dosáhnout v jádru tak velkou přitažlivost, že by došlo k uplatnění relativistických efektů a vzniku *černé díry*. Je třeba ovšem upozornit na to, že např. modelové výpočty ženevské skupiny (např. Schaller a spol. 1992), ve kterých se bere v potaz i únik hmoty ve formě hvězdného větru, ukazují, že např. hvězda s počáteční hmotností 60 $M_\odot$ ztratí již během fáze hoření vodíku v jádru plných 12 $M_\odot$.

Modelové výpočty rovněž potvrzují to, co bylo řečeno na začátku: Vývoj probíhá tím rychleji, čím je hvězda hmotnější. Životní doby hoření vodíku v jádru jsou navíc rostoucí funkcí počátečního obsahu vodíku i původního obsahu těžkých prvků.

7.3 Jak srovnávat teorii hvězdného vývoje s pozorováním?

Je zřejmé, že všechny makroskopické veličiny, jež charakterizují hvězdy, a které můžeme ze Země pozorovat, se v důsledku hvězdného vývoje v naprosté většině vývojových fází mění příliš pomalu, než abychom je mohli během lidského života pozorovat. Kvantitativní pozorovací údaje o jasnostech či teplotách hvězd existují (až na několik čestných výjimek) pouze za období posledních asi 100 – 150 let. Nezbývá proto, než se při srovnávání teorie s pozorováním uchýlit ke statistice a k jiným nepřímým metodám srovnávání a k hledání důkazů diferencovaného vývoje v důsledku různé počáteční hmotnosti hvězd.

Uvažme nejprve, jaké měřitelné veličiny můžeme pro podobné porovnávání použít.

7.3.1 Zářivý výkon hvězdy

Velké množství hvězd bylo proměřeno v Johnsonově UBV systému či ve Strömgrenově *uvby*. Hvězdné velikosti měřené ve žluté barvě Strömgrenova systému y jsou přímo navázány na Johnsonovy hvězdné velikosti ve žlutém filtru V jeho systému. I z dalších praktických důvodů se při srovnávání dat z různých zdrojů jeví hvězdná velikost měřená ve žluté barvě jako nejvhodnější: rozložení energie hvězd se v oblasti žluté barvy kolem 550 nm mění jen zvolna s vlnovou délkou a také extinkční koeficient naší atmosféry je při pozorování ve žluté barvě nižší, než v barvě modré či fialové. (Za dobrých pozorovacích podmínek zřídkakdy na kterékoliv pozemské observatoři přesahuje hodnotu 0,3 – 0,4; v dobrých podmínkách bývá pouze asi 0,15.) Ze všech těchto důvodů jsou měření ve žluté barvě zatížena nejmenšími chybami a také se nejsnáze převádějí na standardní systém.

Chceme-li ovšem měření jasnosti ve žluté barvě srovnávat s bolometrickým zářivým výkonem modelu L_*, musíme provést několik kroků. Nejprve musíme naměřenou zdánlivou hvězdnou velikost přepočítat na velikost absolutní, jakou by hvězda měla ve vzdálenosti 10 pc od nás. (1 pc = $3{,}085678\times10^{16}$ m je vzdálenost, ze které je vidět střední poloměr zemské dráhy okolo Slunce, astronomická jednotka, pod úhlem $1\overset{\prime\prime}{.}0$.) Protože tok záření v prázdném prostoru ubývá se čtvercem vzdálenosti d, je zřejmě

$$M_V - V = -2,5 \log \frac{d^2}{100}. \quad (271)$$

Vlivem mezihvězdné hmoty dochází však na velkých vzdálenostech k pohlcování světla hvězdy, což se obvykle popisuje absorpčním koeficientem ve žluté barvě A_V. Po proměření řady hvězd, u nichž bylo možno získat určitou představu o jejich vzdálenosti od nás, bylo zjištěno, že absorpci ve žluté barvě lze dobře popsat pomocí vztahu $A_V = 3E(B-V)$, kde veličina $E(B-V)$ označuje zčervenání barevného indexu $(B-V)$. To se dá z měření v Johnsonově či Strömgrenově systému obvykle dobře určit. Zdánlivá hvězdná velikost ve žluté barvě, opravená o mezihvězdnou absorpci, se obvykle označuje indexem nula a je tedy

$$V_0 = V - A_V. \quad (272)$$

Pro absolutní hvězdnou velikost ve žluté barvě, zvanou obvykle velikost *visuální*, tak dostáváme jednoduchý pracovní vztah

$$M_V = V_0 + 5 - 5 \log d = V_0 + 5 + 5 \log \pi. \quad (273)$$

Vztah (273) můžeme přirozeně použít jen tehdy, známe-li vzdálenost hvězdy od nás. Pro hvězdy do vzdáleností asi 100 pc bylo možno vzdálenosti již od dob astronomického využití fotografických emulzí určovat trigonometrickou metodou. V nedávné době se díky mimořádně uspěšné družici Evropské kosmické agentury *Hipparcos*, která měřila velmi přesné paralaxy a též jasnosti hvězd v období let 1989-1994, podařilo tuto hranici prakticky o jeden řád zvětšit. Kromě toho lze měření jasnosti této družice pořizovaná ve velmi širokopásmovém filtru a označovaná jako H_p, v mnoha případech velmi přesně převést na Johnsonovu hvězdnou velikost ve žluté barvě pomocí vztahu, který publikoval Harmanec (1998). Jinou – i když podstatně méně přesnou – možností je odhadnout vzdálenost podle vzhledu spektra hvězdy. Tato metoda t.zv. spektroskopické paralaxy byla navržena Adamsem a Kohlschütterem (1914).

Rozdíl mezi bolometrickou a visuální absolutní hvězdnou velikostí se nazývá bolometrická korekce BC. Bolometrické korekce byly empiricky určeny na základě měření úhlových průměrů hvězd pomocí intenzitního interferometru, měření jejich rozložení energie a s použitím modelů atmosfér pro odhad příspěvku z krátkovlnné části spektra. Souhrnně jsou jako funkce efektivní teploty tabelovány v práci Code a spol. (1976) nebo v závislosti na spektrálním typu hvězd v práci Popper (1980). Jejich přičtením k absolutní visuální velikosti ze vztahu (273) dostáváme potřebnou absolutní velikost bolometrickou:

$$M_{\rm bol} = M_V + BC. \tag{274}$$

Tuto bolometrickou hvězdnou velikost můžeme již přímo porovnat s bolometrickou hvězdnou velikostí spočtenou ze zářivého toku toku hvězdy, udaného v jednotkách zářivého toku Slunce, který bývá obvykle v pracech s modely hvězdných niter tabelován:

$$M_{\rm bol} - M_{{\rm bol}_\odot} = -2,5 \log \frac{L_*}{L_\odot}. \tag{275}$$

Protože novější studie ukazují, že zářivý výkon Slunce se poněkud mění během jedenáctiletého slunečního cyklu, a protože hodnota sama závisí na současné přesnosti našich měření, vyskytují se v literatuře pro zářivý výkon Slunce mírně odlišné údaje. To je ovšem nepříjemnost, která do našich srovnání vnáší zbytečnou nepřesnost navíc. Proto Mezinárodní astronomická unie přijala na svém 23. valném shromáždění r. 1997 resoluci (pro níž jsem měl to potěšení jako zástupce Českého národního komitétu Unie i osobně hlasovat), která stanoví, že nadále již nebude bolometrický zářivý výkon hvězd kalibrován zářivým výkonem Slunce (který se jednak mírně mění během jedenáctiletého slunečního cyklu, jednak se od autora k autorovi poněkud liší), ale že jeho nulový bod bude pevně stanoven, konkrétně

$$L_0 = 3,055 \times 10^{28}\,{\rm W} \quad \text{pro} \tag{276}$$

$$M_{\rm bol} = 0\overset{\rm m}{.}00. \tag{277}$$

Je snadné si ověřit, že to dobře odpovídá často přijímaným následujícím středním hodnotám pro Slunce

$$M_{{\rm bol}_\odot} = +4\overset{\rm m}{.}75, \tag{278}$$

$$L_\odot = 3,846 \times 10^{26}\,{\rm W}. \tag{279}$$

7.3.2 Efektivní teplota hvězdy

Efektivní teplotu hvězdy lze odhadnout přímo z jejího spektrálního typu. Existují různé škály efektivních teplot od různých autorů, jako dobrou lze doporučit např. škálu publikovanou v práci Popper (1980). Ideální ovšem je použít k určení efektivní teploty spočtené detailní modely hvězdných atmosfér a srovnávat pozorované a spočtené profily řady spektrálních čar, až nalezneme model, jehož spočtené čáry nejlépe popisují spektrum pozorované.

7.3.3 Hmoty a poloměry hvězd

Pro řadu zákrytových dvojhvězd, jejichž vývoj nebyl dosud ovlivněn přímou interakcí mezi složkami, se podařilo ze spektroskopie a fotometrie určit všechny jejich základní vlastnosti: hmoty, poloměry, efektivní teploty a zářivé výkony složek.

Poloměry hvězd lze rovněž získat z kombinace interferometrických pozorování, ze kterých získáme úhlové rozměry, a ze spolehlivě určené vzdálenosti. Tu lze pro bližší hvězdy získávat přímým trigonometrickým měřením, jak už o tom byla řeč výše, nebo lze studovat hvězdy z hvězdokup s dobře určenou vzdáleností.

7.3.4 Hertzsprungův-Russellův diagram pro hvězdokupy

Protože i hvězdokupy, patřící do naší Galaxie, jsou od nás vzdáleny nejméně desítky parseků, můžeme vzhledem k jejich daleko menším vlastním rozměrům předpokládat, že všechny jejich členy vidíme prakticky ve stejné vzdálenosti od nás. Toto poznání se stalo základem pro jeden z nejlepších testů teorie hvězdného vývoje. Pro danou hvězdokupu totiž stačí provést měření jasnosti jejich členů v nějakém standardním fotometrickém systému a poté zkonstruovat diagram barevný index versus zdánlivá visuální hvězdná velikost. Takový diagram je v zásadě jen jiným provedením HR diagramu. Příkladně pro Johnsonův UBV systém existuje velmi dobrá kalibrace mezi indexem $(B - V)$ a mezi spektrálním typem či efektivní teplotou hvězdy. Protože všechny hvězdy kupy jsou zhruba stejně daleko, popisují zdánlivé jasnosti hvězd zcela správně jejich *vzájemné* jasnosti.

7.4 Srovnání předpovědí teorie hvězdného vývoje s pozorováním

7.4.1 Vysvětlení hlavních rysů HR diagramu

Zcela zásadním úspěchem teorie hvězdného vývoje je to, že dokáže velmi dobře vysvětlit nerovnoměrné rozložení hvězd v HR diagramu. Konkrétně hlavní posloupnost v HR diagramu se ukázala být identická s množinou bodů ($\log T_{eff}, M_{\rm bol}$), které definují modely hvězd o různých počátečních hmotnostech pro fáze klidného slučování vodíku na helium v jejich jádrech. Teorie předpovídá, že tyto fáze vývoje trvají nejdéle, a proto máme statisticky největší šanci právě v nich hvězdy pozorovat. Navíc se velmi uspokojivě shodují předpovězená a pozorovaná poloha hlavní posloupnosti.

7.4.2 Projevy vývoje ve hvězdokupách

Historicky prvním velkým úspěchem teorie hvězdného vývoje byl souhlas předpovědi s pozorováními několika hvězdokup, který publikoval Sandage (1957). Jak jsme podrobně probrali, vyvíjejí se hvězdy tím rychleji, čím je jejich počáteční hmotnost větší. Mimo to můžeme pokládat za velice pravděpodobné, že všechny hvězdy dané hvězdokupy vznikly současně. Každá hvězdokupa je tedy jako celek nějak stará a dá se čekat, že čím je starší, tím méně hmotné hvězdy k ní patřící stačily již spotřebovat ve svých jádrech zásobu vodíku a opustit hlavní posloupnost. Sandage poskládal v HR diagramu pozorování hvězd z 11 hvězdokup se známými absolutními visuálními hvězdnými velikostmi a ukázalo se, že v dolní části hlavní posloupnosti se pozorování ze všech hvězdokup dobře shodovala, zatímco v horní části se jednotlivé hvězdokupy lišily podle svého stáří.

Toto zásadní zjištění je dnes používáno již ne k důkazu správnosti teorie hvězdného vývoje, ale naopak k určování stáří hvězdokup a jejich vzdálenosti od nás. Při detailních studiích se postupuje tak, že se nejprve pomocí spektroskopických pozorování řady členů kupy určí její chemické složení, konkrétně obsah těžkých prvků Z a helia Y a poté se srovnává její pozorovaný HR diagram s předpovědí modelových výpočtů pro dané chemické složení. Z bodu, kde se pozorovaná sekvekce hvězd kupy v HR diagramu začíná vzdalovat od hlavní posloupnosti, lze velmi přesně odhadovat vývojový věk kupy. Naopak konstanta, o kterou bylo třeba změnit pozorované zdánlivé visuální hvězdné velikosti, opravené o mezihvězdnou absorpci, aby se hvězdy hlavní posloupnosti v pozorovaném a modelovém HR diagramu překrývaly, se obvykle nazývá *modul vzdálenosti MOD* a podle (273) jej zřejmě lze vyjádřit takto:

$$MOD = V_0 - M_V = 5 \log d - 5. \tag{280}$$

Z něj můžeme ihned spočítat vzdálenost hvězdokupy od nás.

Je třeba se zmínit, že poté, co byla zpracována měření vzdáleností z již zmiňované družice *Hipparcos*, ukázalo se, že pro většinu dobře pozorovaných galaktických hvězdokup se fotometricky a trigonometricky určené vzdálenosti velmi dobře shodují, ale v několika případech existuje dosud ne zcela uspokojivě vysvětlený rozdíl. Konkrétně pro velmi známou hvězdokupu Plejády (M45) je podle Pinsonneaulta a spol. (1998) fotometricky určená vzdálenost (s použitím modelů hvězdného vývoje) asi 130 pc, zatímco měření družice *Hipparcos* vedou na vzdálenost (116 ± 3) pc. Tito autoři vyslovili domněnku, že měření družice *Hipparcos* mohou být na některých částech oblohy zatížena systematickou chybou. Na obranu spolehlivosti měření družice *Hipparcos* však velmi přesvědčivě vystoupili Robichon a spol. (1999), kteří ukázali, že fotometrická vzdálenost Plejád se podle určení různých autorů pohybuje v rozmezí 124 – 132 pc a z vlastní analýzy určili vzdálenost Plejád z družicových měření na 115 – 121 pc. Nezávisle vyloučil existenci systematických chyb v měření družice *Hipparcos* van Leeuwen (1999), který z nich určil vzdálenost Plejád v rozpětí 115 – 122 pc.

7.4.3 Projevy vývoje ve dvojhvězdách

Pokud se podaří pro některou zákrytovou dvojhvězdu s dobrou přesností určit její základní fyzikální vlastnosti, můžeme se opět pokusit o srovnání s vývojovými modely spočtenými pro pozorované hmotnosti obou složek. Harmanec (1988) kriticky shromáždil určení hmot a poloměrů hvězd hlavní posloupnosti a odvodil střední závislost těchto veličin na efektivní teplotě hvězdy. Jeho empirickou kalibraci lze porovnat se spočtenou sítí modelů Schallera a spol. (1992). Toto srovnání ukazuje velmi dobrou shodu v celém rozsahu hmotností, pro něž byly modely spočteny.

Andersen (1991) prováděl detailní srovnání vývojových modelů s konkrétními dvojhvězdami. Ve většině případů nalezl velmi dobrou shodu t.j. v mezích přesnosti stejný vývojový věk obou složek a dobrou shodu vypočtené a pozorované polohy v různých diagramech. Pro některé systémy se však shodu nalézt nepodařilo pro žádné rozumné chemické složení.

Na okraj poznamenejme, že pro dvojhvězdy s výstřednými drahami lze rovněž porovnávat pozorované a z modelů předpovězené stáčení přímky apsid. I zde existují případy dobré shody a případy neshody, tento test však závisí na více okolnostech.

7.4.4 Projevy vývoje za dobu lidské historie

Projevy hvězdného vývoje můžeme pozorovat jen v případech velmi rychlých vývojových stádií. Soudí se např., že projevem závěrečných fází vývoje hmotnějších hvězd jsou výbuchy supernov, které rozmetají většinu hmoty hvězdy do okolního prostoru. Tento názor potvrdil výbuch supernovy 1987 A ve Velkém Magellanově mračnu, kdy byl detekován i slabý tok neutrín. Jiným argumentem je i přítomnost pulzaru v centru Krabí mlhoviny, která vznikla při výbuchu supernovy pozorovaném roku 1054.

Podobně se soudí, že např. známá proměnná hvězda FG Sge s velkou amplitudou změn, je hvězda v dynamickém pozdním stádiu vývoje (post-AGB star) - viz např. Jurcsik a Montesinos (1999).

Za důkaz hvězdného vývoje se považují i nálezy bílých trpaslíků v centru planetárních mlhovin.

Nezvyklý a originální pokus o ověření hvězdného vývoje v reálném čase učinil Mayer (1984), který se srovnáním hvězdných velikostí z katalogu Almagest se současnými pozorovanými jastnostmi veleobrů pokusil statisticky prokázat jejich pozorovatelný vývoj ve shodě s teorií. Jeho výsledky však byly nedávno Hearnshawem (1999) podrobeny kritice. I k Hearnshawově studii však lze mít výhrady a věc tak zůstává otevřená.

8 Vliv rotace

8.1 Rocheův model a jednoduché odhady

Hrubý odhad vlivu rotace na rozměry hvězdy poskytuje Rocheův model, který lze považovat za polytropní model pro $n = 5$. Pro rotující hvězdu můžeme uvažovat válcové souřadnice s osou z identickou s osou rotace a druhou souřadnicí l, která označuje kolmou vzdálenost od rotační osy. Rocheův model je založen na předpokladu, že všechna hmota hvězdy je soustředěna ve hmotném bodu v jejím centru, a na předpokladu tuhé rotace s úhlovou rychlostí ω. Jak jsme viděli, je z hlediska povrchových vrstev tento předpoklad u reálných hvězd docela dobře splněn.

Na částici v atmosféře hvězdy působí jednak gravitační síla $-GM_*r^{-2}$, kde $r^2 = l^2 + z^2$, jednak odstředivá síla $\omega^2 l$. Celkový potenciál je tedy

$$\Phi = \frac{GM_*}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 l^2. \tag{281}$$

Ekvipotenciální plochy jsou zároveň plochami konstantní hustoty, takže rotující hvězda bude zaujímat tvar některé konkrétní ekvipotenciální plochy.

Zkoumejme, jaké budou vlastnosti kritické plochy, pro níž bude někde výslednice přitažlivé a odstředivé síly nulová. Podmínkou pro to je nulový gradient potenciálu. Konkrétně dostáváme

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{1}{2}GM_*(l^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}2z = -GM_*r^{-3}z = 0, \tag{282}$$

což je zřejmě splněno všude v rovině rovníku hvězdy t.j. pro $z = 0$, a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = -GM_*l(l^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + l\omega^2 = 0. \tag{283}$$

Protože $z = 0$, je tato druhá podmínka splněna pro l_0 pro něž platí

$$GM_*(l_0^2)^{-\frac{3}{2}} = \omega^2, \tag{284}$$

čili

$$GM_* = \omega^2 l_0^3. \tag{285}$$

Hodnota kritického potenciálu je tedy

$$\Phi_{\mathrm{krit.}} = \frac{GM_*}{l_0} + \frac{1}{2}\omega^2 l_0^2 = \frac{3}{2}\omega^2 l_0^2. \tag{286}$$

Kritická ekvipotenciála je tedy množinou bodů (l, z), pro něž platí

$$\omega^2 l_0^3 (l^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\omega^2 l^2 = \frac{3}{2}\omega^2 l_0^2. \tag{287}$$

Můžeme ještě zjistit hodnotu polárního poloměru takové kriticky rotující hvězdy z_{pol}, jestliže položíme $l = 0$:

$$\omega^2 l_0^3 = \frac{3}{2} z_{\mathrm{pol}} \omega^2 l_0^2, \tag{288}$$

takže dostáváme

$$z_{\mathrm{pol}} = \frac{2}{3} l_0. \tag{289}$$

Vidíme tedy, že hvězda rotující na mezi své dynamické stability má rovníkový poloměr o polovinu větší než poloměr polární.

To může mít vliv na odhady poloměrů hvězd z jejich hvězdné velikosti. Pokud bychom pozorovali hvězdu rotující v blízkosti kritické rotační rychlosti zhruba od pólu rotace, budeme vidět v zásadě její rovníkový poloměr, o polovinu větší, než její poloměr polární. Pokud však pozorujeme hvězdu zhruba v rovině jejího rovníku, můžeme průmět zářící plochy v prvním přiblížení aproximovat plochou elipsy s velkou poloosou rovnou rovníkovému, a malou polárnímu poloměru hvězdy. Pro efektivní poloměr R_{ef} tak dostáváme

$$\pi R_{\mathrm{ef}}^2 = \pi ab = 1,5\pi R_{\mathrm{pol}}, \tag{290}$$

neboli

$$R_{\mathrm{ef}} = \sqrt{1,5} R_{\mathrm{pol}} \simeq 1,225 R_{\mathrm{pol}}. \tag{291}$$

Uveďme si v té souvislosti několik užitečných základních vztahů, které se hodí pro podobné odhady. U rotujících hvězd se můžeme setkat s projevy rychlé proměnnosti jasnosti nebo profilů spektrálních čar. Může se stát, že si budeme chtít učinit představu, v jakém rozmezí se může nalézat očekávaná rotační perioda rotující hvězdy.

Označíme-li v rovníkovou rotační rychlost hvězdy, $R_{\rm rov}$ její rovníkový poloměr a $P_{\rm rot}$ její rotační periodu, platí zřejmě

$$v = \frac{2\pi R_{\rm rov}}{P_{\rm rot}}. \tag{292}$$

Bývá zvykem vyjadřovat obvodovou rotační rychlost v $\mathrm{km\,s^{-1}}$, rotační periodu ve dnech a poloměry hvězd v jednotkách slunečního poloměru. Pro sluneční poloměr můžeme přijmout hodnotu získanou z přesných měření středního úhlového poloměru na observatoři Côte d'Azur v letech 19 (můj výpočet střední hodnoty z aproximace dat sinem s periodou 11 let) násobenou astronomickou jednotkou, tedy

$$R_\odot = 1,495979.10^{11}\sin(959{,}''4176) = 6,95835.10^{8}\mathrm{m}, \tag{293}$$

dostáváme užitečnou pracovní rovnici

$$v = 50,6025\frac{R_{\rm rov}/R_\odot}{P}. \tag{294}$$

Žádná hvězda nemůže rotovat rychleji, než kritickou rychlostí v_K, při které se přitažlivá a odstředivá síla vyrovnávají (Keplerova či oběžná rychlost), tedy

$$\frac{GM_*}{R_{\rm rov}^2} = \frac{v_K^2}{R_{\rm rov}}, \tag{295}$$

což vede na vztah

$$v_K = \left(\frac{GM_*}{R_{\rm rov}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{296}$$

Pokud opět hmotnost a rovníkový poloměr hvězdy budeme vyjadřovat v jednotkách hmotnosti a poloměru Slunce a použijeme-li moderní hodnoty z práce Gundlach a Merkowitz (2000)

$$M_\odot = (1,988435 \pm 0,000027).10^{30}\mathrm{kg}, \tag{297}$$
$$G = (6,674215 \pm 0,000092).10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}} \tag{298}$$

bude

$$v_K = 436,72\left(\frac{M_*/M_\odot}{R_{\rm rov}/R_\odot}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{299}$$

Kombinací vztahů (294) a (299) dostáváme odhad minimální možné rotační periody ve tvaru

$$P_{\rm min} = 0,11587(R_{\rm rov}/R_\odot)\sqrt{\frac{R_{\rm rov}/R_\odot}{M/M_\odot}} \qquad (300)$$

$$P_{\rm min} = 0,21287(R_{\rm pol}/R_\odot)\sqrt{\frac{R_{\rm pol}/R_\odot}{M/M_\odot}}. \qquad (301)$$

Pro konkrétní hvězdy ve většině případů neznáme sklon jejich rotační osy vůči nám, z rotačního rozšíření profilů spektrálních čar proto určíme pouze projekci rotační rychlosti v sin i, tedy hodnotu, která je menší než skutečná rovníková rotační rychlost nebo je jí nanejvýš rovna. Proto můžeme pro hvězdu se změřenou promítnutou rotační rychlostí v sin i – máme-li představu o jejím poloměru – odhadnout i maximální možnou rotační periodu s použitím vztahu (294):

$$P_{\rm max} = 50,6025\frac{(R_{\rm rov}/r_\odot)}{v\sin i}. \qquad (302)$$

Je ovšem třeba upozornit na jednu okolnost. Pokud se nějakým vnějším vlivem vytvoří v blízkosti rovníku hvězdy, která rotuje hluboko pod kritickou rotační rychlostí a je prakticky sférická, cirkumstelární plynová obálka (např. akreční disk ve dvojhvězdě), může být perioda rotace případných struktur v takové obálce kratší, než by plynulo z aplikace vztahů (300) a (301). Odhad mimimální periody v takových případech dostaneme, jestliže do vztahu (300) dosadíme za rovníkový poloměr skutečný sférický poloměr hvězdy.

8.2 Modely hvězdného vývoje se započtením rotace

Rotace může ovlivnit stavbu hvězdy v několika směrech:

1. Odstředivá síla všude mimo rotační osu hvězdy snižuje efektivní gravitaci.

2. Protože vektor odstředivé síly není mimo rovník hvězdy rovnoběžný s vektorem síly přitažlivé, ekvipotenciály přestávají být kulové, jak jsme to již diskutovali výše pro limitní případ Rocheova modelu.

3. Protože se zářivý tok mění s efektivní gravitací v tom kterém místě, není tok záření konstantní na daném ekvipotenciálním povrchu, což může změnit podmínky vzniku konvektivní rovnováhy.

4. Rotace může ovlivňovat konvekci několika dalšími způsoby: jednak může působit proti konvektivním pohybům, jednak může – v důsledku přerozdělování momentu hybnosti určité konvektivní pobyby vyvolat i v oblastech zářivé rovnováhy (v důsledku diferenciální rotace, meridionální cirkulace).

5. Rotace způsobí i meridionální cirkulaci, která vede na diferenciální rotaci, ta vyvolá 'střih' a efektivní promíchávání hvězdného materiálu a to vše též ovlivní přerozdělování úhlového momentu hybnosti a obecně způsobí, že rotační rychlost v různých částech hvězdy nebude odpovídat konservativnímu případu, t.j. odtředivá síla nebude mít potenciál.

Naprostá většina badatelů zabývajících se modelováním výboje hvězd se započtením rotace se ovšem zatím omezila na (vnitřně fyzikálně nekonsistentní) případy, kdy lze odstředivou sílu potenciálem popsat. Při obecné formulaci se obvykle vychází z vektorového tvaru základních rovnic. Pro silové pole se uvažuje obecný gravitační potenciál a potenciál rotace, jak byl popsán dříve (viz vztah (281)). Rovnici hydrostatické rovnováhy lze pak zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla\Phi + \omega^2\vec{l} = -\nabla\Psi, \tag{303}$$

kde Φ označuje gravitační potenciál, Ψ je celkový potenciál, ω je úhlová rotační rychlost kolem osy z a vektor l míří kolmo na osu rotace a jeho délka je rovna kolmé vzdálenosti uvažovaného místa od osy z.

Rovnici kontinuity nahradí Poissonova rovnice ve tvaru

$$\mathrm{div}(\nabla\Phi) = 4\pi G\rho. \tag{304}$$

Místo veličiny L_R je výhodnější uvažovat znovu tok záření jednotkovou plochou $\vec{H}$ a rovnici zářivého přenosu energie můžeme pak psát ve tvaru

$$\nabla T = -\frac{3\kappa\rho}{4acT^3}\vec{H} \tag{305}$$

a rovnice tepelné rovnováhy nabude tvar

$$\vec{\nabla}.\vec{H} = E\rho, \tag{306}$$

kde E představuje součet veškeré uvolňované energie.

Dá se ukázat (viz např. Schwarzschild 1958), že pro rotační zákony, pro něž úhlová rychlost rotace závisí pouze na vzdálenosti od osy rotace z, jsou všechny fyzikální veličiny konstantní podél každé ekvipotenciální plochy. Pro případ tuhé rotace lze pro celkový potenciál psát

$$\Psi(R, \vartheta) = \Phi(R, \vartheta) - \frac{1}{3}\omega^2 R^2 [1 - P_2(\cos\vartheta)], \tag{307}$$

kde

$$P_2(\cos\vartheta) = \frac{1}{4}(3\cos(2\vartheta) + 1) \tag{308}$$

je Legendrův polynom druhého stupně. Lze definovat jakýsi střední poloměr každé ekvipotenciální plochy R_0 jako poloměr ve směru $\vartheta = \vartheta_0$, pro který je $P_2(\cos\vartheta_0) = 0$. To je splněno pro $\vartheta \simeq 55°$.

Jak si jako první uvědomili Faulkner, Roxburgh a Strittmatter (1968), je v takovém případě možné napsat pro poloměr R_0 rovnice formálně velmi podobné rovnicím pro případ nerotující hvězdy.

Jiný postup zvolili Kippenhahn a spol. (1970). Vyšli z toho, že rotace ovlivňuje hvězdu dvojím způsobem:

- působí proti gravitaci spolu s gradientem tlaku, a
- způsobuje rotační zploštění hvězdy.

Oni se rozhodli zploštění ignorovat. Předpokládali rovněž sférickou symetrii úhlové rychlosti, tedy $\omega = \omega(R)$. Vzhledem k rotační symetrii lze pro *radiální složku* odstředivé síly působící na slupku o hmotnosti dM_R psát

$$\omega^2 l \sin\vartheta dM_R = \omega^2 R \sin^2\vartheta dM_R. \tag{309}$$

Středováním přes ϑ získáme střední hodnotu radiální složky odstředivé síly $\frac{2}{3}\omega^2 R dM_R$. Na plošnou jednotku na povrchu koule o poloměru R působí tedy radiálně odstředivá síla

$$\frac{1}{4\pi R^2}\frac{2}{3}\omega^2 R dM_R = \frac{\omega^2 dM_R}{6\pi R}. \tag{310}$$

Příslušná rovnice hydrostatické rovnováhy nabude tedy tvar

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4} + \frac{\omega^2}{6\pi R}. \tag{311}$$

To je třeba vzít v potaz i v rovnici konvektivní rovnováhy.

Jejich metodu převzali a ještě zdokonalili Endal a Sofia (1976). Předpokládali opět, že místy stejné teploty, tlaku a hustoty jsou ekvipotenciální plochy a jako nezávisle proměnnou zvolili veličinu M_Ψ, t.j. hmotu obsaženou uvnitř ekvipotenciální plochy s hodnotou celkového potenciálu Ψ. Místo poloměru R zavedli jakýsi efektivní poloměr ekvipotenciální plochy R_Ψ vztahem

$$V_\Psi = \frac{4\pi}{3} R_\Psi^3, \tag{312}$$

kde V_Ψ je objem příslušné ekvipotenciální plochy. To jim umožnilo psát rovnici kontinuity ve tvaru

$$dM_\Psi = \rho dV_\Psi = 4\pi R_\Psi^2 \rho dR_\Psi, \tag{313}$$

a tedy

$$\frac{dR_\Psi}{dM_\Psi} = \frac{1}{4\pi R_\Psi^2 \rho}, \tag{314}$$

což je rovnice formálně stejná, jako pro případ nerotující hvězdy. Hodnoty všech veličin, které se na ekvipotenciálním povrchu nezachovávají, středovali integrací přes povrch ekvipotenciální plochy.

Asi od druhé poloviny devadesátých let 20. století se studiu vývoje rotujících hvězd soustavně věnuje ženevská skupina kolem prof. Maedera. Základy jejich přístupu jsou popsány v práci Meyneta a Maedera (1997). Tito autoři upozornili na problém nekonservativnosti rotace. Aby i přesto mohli celý problém pojednat jako jednorozměrný, předpokládali, že diferenciální rotace má takový charakter, že úhlová rychlost rotace ω je konstantní na isobarech – plochách konstantního tlaku. To vcelku dobře odpovídá existujícím studiím turbulence u Slunce i u jiných hvězd. V anglické literatuře se takový charakter rotace nazývá "shellular rotation". Pro menší rotační rychlosti lze takovou rotaci dobře aproximovat vztahem $\omega = \omega(R)$, který předpokládali již Kippenhahn a spol. (1970). Meynet a Maeder (1997) ukázali, že v takovém případě lze využít výše naznačený postup s tím, že místo ekvipotenciálních ploch se uvažují isobary, a odvodili příslušný tvar rovnic. Další studie rotace hvězd jsou popsány v pokračující serii prací (Meynet & Maeder 1997, 2000, Maeder 1997, 1999, Maeder & Meynet 2000b, Maeder & Zahn 1998) a shrnuty v práci Maeder a Meynet (2000a).

Dosyd jediné experimentální dvourozměrné modely vývoje rotujících hvězd publikovali Shindo a spol. (1997) pro hvězdu o hmotnosti 18 $m_\odot$ a pro heliovou hvězdu o hmotnosti 5 $m_\odot$.

Je ovšem třeba říci, že všechny tyto studie je třeba považovat za předběžné. Porovnávání výsledků se skutečně pozorovanými hvězdami je proto třeba činit s patřičnou reservou, neboť obecný problém v alespoň dvourozměrném (rotačně symetrickém popisu) nebyl ještě zdaleka vyřešen.

8.3 Některé výsledky vývoje rotujících hvězd

Sackmann a Anand (1970) spočítali modely rotujících hvězd hlavní posloupnosti o hmotnostech mezi 5 a 10 $M_\odot$ a vývoj rotující hvězdy o hmotnosti 10 $M_\odot$ za předpokladu *tuhé rotace a zachování celkového momentu hybnosti*. Při výpočtu vývoje hvězdy tedy měnili model od modelu úhlovou rychlost rotace (kterou podle předpokladu zachovávali pro každý čas konstantní v celé hvězdě) tak, aby byla splněna podmínka

$$J\omega = konst., \tag{315}$$

kde J označuje moment setrvačnosti celé hvězdy.

Zjistili, že za těchto předpokladů je vliv rotace na stavbu hvězd hlavní posloupnosti poměrně malý. Bolometrický zářivý výkon se snižuje jen o méně než 7 % a polární poloměr hvězdy o méně než 2 %.

Výrazné změny však nastávají během nukleárního vývoje hvězdy. S postupným růstem poloměru hvězdy sice klesá obvodová rychlost na rovníku, ale ukazuje se, že pomaleji, než rychlost kritická, která – jak víme z rovnice (9.7) – klesá s poloměrem podle vztahu

$$v_K \sim R^{-\frac{1}{2}}. \tag{316}$$

Modely proto vedou k závěru, že i hvězdy, které mají na hlavní posloupnosti nulového věku rotační rychlosti několikrát menší než je rychlost kritická, se během vývoje na hlavní posloupnosti mohou stát rotačně nestabilní. Sackmann a Anand tím vysvětlovali možný vznik hvězd se závojem.

Kippenhahn a spol. (1970) propočetli vývoj rotujících hvězd pro dva jiné možné případy:

- Moment hybnosti se zachovává lokálně v oblastech zářivé rovnováhy zatímco v oblastech konvektivního přenosu energie rotuje hvězda jako tuhé těleso a zachovává se celkový moment hybnosti.
- Moment hybnosti se zachovává lokálně v oblastech měnícího se chemického složení; v oblastech, kde je chemické složení homogenní, rotuje hvězda jako tuhé těleso a zachovává se celkový moment hybnosti.

Vývoj pro obě uvedené alternativy spočetli pro hvězdu o hmotnosti 9 $\mathrm{m}_{\odot}$, přičemž pro model na hlavní posloupnosti nulového věku předpokládali tuhou rotaci. Vývoj propočítali až do fází vyhoření helia a v obou případech vedl v závěrečných fázích ke vzniku rychle rotujícího jádra a pomalu rotujících vnějších vrstev. Pro druhý uvažovaný případ zachovávání momentu hybnosti navíc vývoj na konci hlavní posloupnosti vedl rovněž k rotační nestabilitě hvězdy, autoři však upozorňují, že již pro model na hlavní posloupnosti nulového věku kritickou rotaci předpokládali.

Kippenhahn a spol. také upozornili na to, že vzhledem k tomu, že rotace zmenšuje efektivní gravitační zrychlení, chová se rotující hvězda v jistých ohledech jako hvězda s poněkud menší hmotností, takže všechna vývojová stadia trvají pro rotující hvězdu poněkud déle než pro nerotující hvězdu o stejné hmotnosti.

Endal a Sofia (1979) propočetli vývojové modely v rozsahu hmotností od 1,5 do 10 $M_{\odot}$ pro tři různé alternativy: tuhou rotaci, zcela lokální zachování momentu hybnosti a pro realistický model simulující co nejlépe očekávané přerozdělování momentu hybnosti ve hvězdě (viz Endal a Sofia 1978). Došli k závěru, že pokud hvězda na hlavní posloupnosti nulového věku rotuje s obvodovou rychlostí, která se rovná alespoň asi 60 % rychlosti kritické, dojde u ní během vývoje na hlavní posloupnosti k rotační nestabilitě, která může napomoci vzniku hvězdy se závojem.

Kromě toho z jejich výpočtů vyplývá, že pro stadium obrů vedou jejich výpočty k nižším rotačním rychlostem než jednodušší rotační modely, takže není třeba hledat další mechanismy ztráty úhlového momentu u K obrů.

Meynet & Maeder (2000) publikovali první síť vývojových modelů rotujících hvězd v rozmezí hmotností 9 – 120 $m_\odot$ pro sluneční chemické složení a různé počáteční rotační rychlosti. Předpokládali nekonservativní odstředivou sílu, vývoj rotační rychlosti modelovali s uvážením všech známých procesů a brali v potaz i ztrátu hmoty hvězdným větrem. Jejich výsledky lze shrnout následovně:

1. *Vývoj rotační rychlosti* Obecně lze říci, že sekulární mechanismy přerozdělení úhlového momentu jako je konvekce či meridionální cirkulace se uplatňují v obdobích klidného vývoje, zatímco v rychlých vývojových stadiích nemají dost času se uplatnit a úhlová rotační rychlost se mění v zásadě tak, že se lokálně zachovává moment hybnosti. Pro modely na počátku hlavní posloupnosti byla předpokládána tuhá rotace. Vývoj během hlavní posloupnosti pak vede k tomu, že úhlová rotační rychlost všude ve hvězdě postupně klesá, včetně centrálního konvektivního jádra. Zároveň se ustaví diferenciální rotace, s rotační rychlostí klesající směrem k povrchu hvězdy. (Tak tomu je především díky započtení ztráty hmoty hvězdným větrem. Testovací výpočet, ve kterém byly uvažovány všechny procesy kromě ztráty hmoty, vede k soustavně rostoucí rotační rychlosti na povrchu hvězdy během vývoje na hlavní posloupnosti a k dosažení kritické rotace.) Ke konci životní doby na hlavní posloupnosti, když relativní hmotnostní obsah vodíku klesne pod 0,05 a jádro se smršťuje, začne úhlová rotační rychlost v centrálních částech růst. Ve fázi celkové kontrakce hvězdy po spotřebování zásob vodíku v jádru roste úhlová rotační rychlost v celé hvězdě. Zejména pro méně hmotné hvězdy (ve studovaném rozsahu hmotností) dosáhne v této fázi krátkodobě rotační rychlost i více než 80 % kritické rotační rychlosti na povrchu hvězdy. Zajímavým zjištěním je i to, že během vývoje podél hlavní posloupnosti klesá rotační rychlost na povrchu hvězdy

tím rychleji, čím větší byla počáteční rychlost rotace. Právě tak je zajímavé si povšimnout, že povrchová rotační rychlost během vývoje klesá s časem tím rychleji, čím je hvězda hmotnější.

2. *Vliv rotace na vývojové dráhy v HR diagramu* Vzhledem k tomu, že – jak jsme se již úvodem zmínili – závisí tok záření na povrchu rotující hvězdy přibližně na lokálním gravitačním zrychlení, jsou polární oblasti hvězdy teplejší než oblasti rovníkové. Hvězda kromě toho nemá kulový tvar a pojem efektivní teploty podle původní definice proto ztrácí smysl. Aby i přesto bylo možno konstruovat teoretický HR diagram, zavedli Meynet & Maeder (1997) střední efektivní teplotu rotující hvězdy vztahem

$$L = \sigma T_{\rm eff}^4 S, \tag{317}$$

   kde S označuje plochu povrchu hvězdy. Srovnání vývoje rotujících a nerotujících hvězd ukazuje, že na hlavní posloupnosti nulového vede rostoucí rotace k poklesu jak efektivní teploty, tak zářivého výkonu hvězdy. Rotující hvězda se proto jeví jako nerotující hvězda s poněkud menší hmotností. Naproti tomu postupný vývoj vede k tomu, že rotující hvězdy mají větší zářivý výkon než hvězdy nerotující. Tento fakt spolu s působením odstředivé síly vedou také k tomu, že ztráta hmoty z rotujících hvězd je o 60 až 100 % větší, než z hvězd nerotujících. Počáteční rotační rychlost 200 $\mathrm{km\,s^{-1}}$ vede rovněž k prodloužení životní doby na hlavní posloupnosti asi o 20 – 30 % a pokud porovnáváme isochrony, zvýší taková rotace odhad staří asi o 25 %.

3. *Vliv rotace na povrchové chemické složení* Velmi zajímavým výsledkem vlivu rotace je to, že již během vývoje nas hlavní posloupnosti dochází u hvězd v uvažovaném rozsahu hmotností k obohacování jejich atmosfér heliem a dusíkem a naopak k úbytku uhlíku a kyslíku. Tento efekt roste s rostoucí hmotností hvězdy.

4. *Možný vztah k některým pozorovaným jevům* Je třeba si uvědomit, že srovnání výsledků modelů rotujících hvězd s pozorováním je obtížné nejen pro to, že rotační modely se dosud

vyvíjejí a nejsou dokonalé, ale i proto, že pro danou hvězdu obvykle neznáme sklon její rotační osy a pokud jde o hvězdu rychle rotující, její pozorované vlastnosti, včetně její zdánlivé polohy v HR diagramu, se přirozeně budou výrazně lišit podle toho, zda se na ni díváme spíše od pólu či spíše od rovníku. Přesto se lze o některých souvislostech alespoň dohadovat.

- *Podmínky pro vznik hvězd se závojem* Z pozorování je známo, že největší procento hvězd se závojem se pozoruje kolem spektrální třídy asi B2, což odpovídá na hlavní posloupnosti hmotnosti asi 9 $m_\odot$. Jak jsme viděli, pro hmotnější hvězdy během vývoje v důsledku rostoucí ztráty hmoty a úhlového momentu povrchová rotační rychlost rychle klesá, takže podmínky pro únik hmoty v rovníkových oblastech se zhoršují. To by s jevem hvězd se závojem mohlo souviset v případě, že k němu v zásadě dochází nějakým vyvrhováním materiálu z hvězdy samotné.
- Z pozorování se zdá, že pro rychleji rotující O hvězdy se pozoruje přebytek helia, jsou známy OBN hvězdy, u nichž je i přebytek dusíku, a ty se vyskytují hlavně mezi hvězdami hmotnějšími než asi 40 $m_\odot$. Rovněž se zdá, že obsah helia a dusíku v atmosférách rotujících B hvězd roste během jejich vývoje na hlavní posloupnosti. Tato fakta jsou v dobré kvalitativní shodě s modelovými výsledky.

9 Hvězdný vítr a ztráta hmoty z hvězd

9.1 Základní fakta a úvahy

To, že hvězdné atmosféry nemusí být statické, a že z nich může docházet k úniku hmoty do okolního prostoru, naznačovala existující pozorování delší dobu.

Již Biermann (1951) upozornil na to, že plynné ohony komet, mířící vždy směrem od Slunce, nasvědčují přítomnosti radiálního výtoku plynu ze Slunce do meziplanetárního prostoru, a odhadl výtokové rychlosti na 500 $\mathrm{km\,s^{-1}}$ v vlízkosti Slunce, urychlující se až k 1500 $\mathrm{km\,s^{-1}}$ ve velkých vzdálenostech od Slunce. Od padesátých let, kdy začaly být vypouštěny sondážní rakety a později i družice a meziplanetární sondy, bylo přímo možné měřit – nejprve v okolí Země a posléze i v různých vzdálenostech od Slunce – tento tok plynu, *sluneční vítr*, a jeho vlastnosti.

Pro *obry a veleobry chladnější než G0* byly nalezeny absorpční čáry vápníku a hořčíku posunuté do fialova vůči rychlosti fotosférických čar. U známých spektroskopických dvojhvězd radiální rychlosti těchto čar nesdílejí oběžný pohyb, což přesvědčivě dokazuje jejich cirkumstelární původ.

Zmíněné chladné hvězdy mají většinou také chromosférické emise čar vápníku a hořčíku a právě pro hvězdy s cirkumstelárními absorpcemi mají dvojité emisní složky poměr V/R menší než jedna. Pro tytéž hvězdy se rovněž pozorují cirmumstelární absorpční čáry He I na vlnové délce 1083,0 nm, posunuté do fialova o 150 – 200 $\mathrm{km\,s^{-1}}$.

Pro zákrytové dvojhvězdy sestávající z chladného veleobra a horké složky spektrálního typu B (soustavy typu ζ Aur) lze během zákrytů pozorovat zejména v družicových ultrafialových spektrech cirmumstelární čáry z obálky veleobra a v průběhu zákrytu tak studovat strukturu hvězdného větru v různé vzdálenosti od povrchu veleobra.

Na spektrech s vysokým rozlišením byly nalezeny čáry z cirkumstelárních obálek M veleobrů až do vzdáleností několika tisíců poloměrů veleobra.

Pro *horké hvězdy spektrálních tříd O a B* o vysoké svítivosti byl únik plynu pozorován nejprve na základě t.zv. P Cygni profilů (nazvaných podle veleobra P Cygni, pro kterého jsou tyto čáry zvláště nápadné): kombinace emisních čar s radiální rychlostí odpovídající radiální rychlosti hvězdy a absorpčních čar téhož iontu, posunutých do fialova a majících tedy záporné rychlosti, naznačující expanzi plynu. Poté, když byla získána první kvalitní ultrafialová spektra hvězd vně zemské atmosféry, byly u mnoha veleobrů pozorovány výrazné P Cyg profily resonančních čar iontů jako C IV, Si IV či N V, které měly v některých případech velmi ostře definován fialový okraj absorpce. Ty naznačovaly, že plyn se ve velkých vzdálenostech urychluje až na rychlosti 2000–3000 $\mathrm{km\,s^{-1}}$. Později bylo zjištěno, že projevy hvězdného větru lze nalézt i u hvězd se závojem (v anglické literatuře Be stars) o nižší svítivosti, t.j. s třídami svítivosti V, IV a III.

Z nebeské mechaniky a z řešení pohybových rovnic je známo, že má-li se hmotná částice dostat z nějakého centrálního gravitačního pole, musí na ní působící odstředivá síla v dané vzdálenosti dvakrát převyšovat přitažlivost centrálního tělesa.

Pro únikovou rychlost od tělesa o hmotnosti M ve vzdálenosti R od jeho centra v_u tedy platí

$$2\frac{GM_*}{R_{\rm rov}^2} = \frac{v_u^2}{R_{\rm rov}}, \tag{318}$$

což vede na vztah

$$v_u = \sqrt{2}\left(\frac{GM_*}{R_{\rm rov}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{319}$$

Pokud opět hmotnost a rovníkový poloměr hvězdy budeme vyjadřovat v jednotkách hmotnosti a poloměru Slunce, dostaneme rovnici analogickou rovnici (299) pro Keplerovu oběžnou rychlost

$$v_u = 617,61\left(\frac{M_*/M_\odot}{R_{\rm rov}/R_\odot}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{320}$$

Několik orientačních odhadů, v jakém rozmezí se pro reálné hvězdy takové únikové rychlosti v blízkosti jejich povrchů mohou pohybovat, je shrnuto v tabulce 2.

9.2 Základy teorie hvězdného větru

Parker (1958) formuloval základy teorie slunečního větru. Ukázal, že potřebné únikové rychlosti lze dosáhnout řešením hydrodynamických rovnic, jestliže předpokládáme, že k výtoku plynu dochází ze sluneční korony zahřáté na teplotu 3000000 K v důsledku vysokých tepelných rychlostí. Podobný mechanismus můžeme předpokládat i u jiných chladných hvězd, které mají rozsáhlé podpovrchové konvektivní zóny a tedy i chromosféry a koróny.

Horké hvězdy mají jen velmi malé podpovrchové konvektivní zóny a proto u nich existence horkých korón není příliš pravděpodobná. I kdyby však koróny z nějaké dosud neznámé příčiny měly, Parkerův mechanismus vzniku slunečního větru by nebyl pro horké hvězdy použitelný. Jak upozornili Lucy a Solomon (1970), k dosažení pozorovaných rychlostí hvězdného větru horkých hvězd (2000-3000 $\rm km\,s^{-1}$)

Tabulka 2: Únikové rychlosti v_u podle rovnice (320) na povrchu různých hvězd

Hvězda	M $(M_\odot)$	R $(M_\odot)$	v_u $(\mathrm{km\,s^{-1}})$
Slunce	1,00	1,00	618
O7V	26,0	8,54	1079
O7Ia	28,0	22,9	683
B0V	14,6	5,80	979
B5V	4,36	3,01	743
A0V	2,24	2,09	639
F0V	1,50	1,56	606
G0V	1,16	1,25	595
K0V	0,91	1,01	556
M0V	0,45	0,52	575
M0Ia	15,8	500,	110

by v hypotetické koróně musely panovat teploty řádu 10 miliónů K, při kterých by ionty C IV, Si IV či N V musely dávno zaniknout v důsledku srážkové ionizace. Lucy a Solomon (1970) proto navrhli jiný mechanismus: vznik hvězdného větru působeného tlakem záření v důsledku selektivní absorpce záření právě v silných resonančních čarách. Jejich myšlenka byla zásadním způsobem vylepšena v klíčové práci Castora, Abbota a Kleina (1975), kteří ukázali, že síla, způsobící únik plynu z atmosfér horkých hvězd, vzniká díky selektivní absorpci velkým množstvím spektrálních čar v ultrafialových spektrech, ne pouze díky čaram resonančním. Podařilo se jim ukázat, že výsledná síla vede na ztrátu hmoty, která je stokrát vyšší,než podle výpočtu Lucyho a Solomona (1970). Jejich práce se záhy stala klasickou prací v oboru a dnes lze často nalézt odkazy na "standardní CAK teorii hvězdného větru řízeného zářením".

Naznačme si nyní, jak se hvězdný vítr modeluje a empiricky popisuje. V zásadě jde o řešení hydrodynamických rovnic. První je rovnice kontinuity, která je přímo časovou derivací rovnice (69)

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v, \tag{321}$$

kde $\dot{M}$ je tok hmoty povrchem koule o poloměru r, nazývaný často rychlostí ztráty hmoty hvězdným větrem a v je rychlost radiálního pohybu plynu ve vzdálenosti r od centra hvězdy.

Podobně jako při odvozování okrajových podmínek pro modely hvězdných niter můžeme pro tlak plynu v atmosféře hvězdy za předpokladu hydrodynamické rovnováhy psát

$$\frac{dP_g}{dr} = -g_{ef.}\rho = -(\frac{GM_*}{R_*^2} - g_r)\rho, \tag{322}$$

kde g_r je zrychlení působené tlakem záření.

Uvažme, jakou mechanickou silou působí záření o intenzitě I_ν na tenkou vrstvu plynu o síle dr, na kterou dopadá pod úhlem ϑ z prostorového úhlu $d\omega$. Z definice intenzity plyne, že množství záření dopadající na jednotkovou plochu na povrchu uvažované vrstvy za čas dt pod úhlem ϑ z prostorového úhlu $d\omega$ v jednotkovém frekvenčním intervalu bude $I_\nu \cos\vartheta d\omega d\nu dt$. Při průchodu vrstvou o tloušťce dr urazí toto záření zřejmě dráhu $\frac{dr}{\cos\vartheta}$. Celkově se tedy z tohoto záření při průchodu uvažovanou vrstvou pohltí energie

$$dE_\nu = \kappa_\nu \rho I_\nu \cos\vartheta d\omega d\nu dt \frac{dr}{\cos\vartheta}, \tag{323}$$

kde κ_ν je opět koeficient opacity (absorpce a rozptyl) v daném frekvenčním intervalu. Jak víme již z rovnice (144), bude příspěvek hybnosti dp dán výrazem

$$dp = \frac{dE_\nu}{c}, \tag{324}$$

kde c je rychlost světla. Příspěvek mechanické síly působící *kolmo* na uvažovanou tenkou vrstvu bude tedy $\frac{dp}{dt}\cos\vartheta$. Celkovou mechanickou sílu záření f_r působící kolmo na jednotkovou plochu uvažované vrstvy tedy získáme integrací přes celý prostorový úhel:

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{1}{c}\int_0^{4\pi} \frac{dE_\nu}{dt} \cos\vartheta d\omega = \frac{\kappa_\nu \rho dr d\nu}{c} \int_0^{4\pi} I_\nu \cos\vartheta d\omega \\ &= \frac{\kappa_\nu \rho dr d\nu}{c} H_\nu, \end{aligned} \tag{325}$$

kde H_ν je celkový monochromatický tok záření v daném místě.

Porovnáním s rovnicí (322) vidíme, že

$$g_r = \frac{1}{c} \int\limits_{\nu=0}^{\infty} \kappa_\nu H_\nu d\nu, \tag{326}$$

neboť chceme uvažovat výslednou sílu záření všech vlnových délek.

Pozor, v mnoha pracech bývá místo celkového monochromatického toku H_ν používán tok F_ν, který je definován vztahem

$$H_\nu = \pi F_\nu. \tag{327}$$

Lucy a Solomon (1970) ukázali, že absorpce záření v resonančních čarách ve vlnových délkách v blízkosti maxima zářivého toku je dostatečná k tomu, aby výsledné gravitační zrychlení bylo záporné. Atmosféra pak nemůže být statická a musí docházet k úniku hmoty.

Castor, Abbot a Klein (1975) řešením pobybové rovnice se započtením absorpce v mnoha čarách zjistili, že v nadzvukové oblasti je poměr zrychlení úniku plynu ke gravitačnímu zrychlení téměř konstantní, asi 1,5. Tím vysvětlují, proč lze rychlost plynu popisovat empirickou formulí

$$v(r) = v_\infty (1 - \frac{R_*}{r})^\beta, \tag{328}$$

kterou užíval již Chandrasekhar ve třicátých letech. Parametr β udávají roven $\frac{1}{2}$, různí autoři jej ale volí různě. Rychlost v nekonečnu v_∞ musí převyšovat rychlost únikovou. Spočetli rovněž, že např. pro hvězdu hlavní posloupnosti spektrálního typu O5 činí rychlost ztráty hmoty 6.10^{-6} $M_\odot$ ročně.

V nedávné době byla rozpracována teorie hvězdného větru soutřeďovaného rotací směrem k rovníku hvězdy. Bjorkman a Cassinelli se pomocí této teorie snažili vysvětlovat vznik hvězd se závojem. Rovněž existují pozorování, že hvězdný vítr není rovnoměrný proud hmoty, existují náznaky modulace s rotační periodou. Na tuto možnost upozorňovali např. Mullan (1984) či Harmanec (1991), pozorováním byla podobná modulace poprvé doložena Owockim a spol. (1995) a hydrodynamický model cirmumstelárních korotujících struktur byl publikován v práci Cranmer a Owocki (1996).

10 Vývoj dvojhvězd

Z toho, co jsme si již o hvězdném vývoji pověděli, je zřejmé, že ve dvojhvězdě se rychleji bude vyvíjet hmotnější složka. Je-li oběžná perioda a tedy vzdálenost mezi složkami menší, než určitá mez, může se již během vývoje na hlavní posloupnosti, pravděpodobněji ale při přechodu hvězdy z hlavní posloupnosti do oblasti obrů po vypálení vodíku v jádru, stát, že se poloměr hvězdy zvětší natolik, že překročí mez stability a plyn z hvězdy začne odtékat směrem k sekundární, méně hmotné složce dvojhvězdy. Tento proces naruší tepelnou rovnováhu hmotu ztrácející hvězdy a výrazně změní její další vývoj. Popišme se nejprve, jak se výpočty ve stadiu výměny hmoty provádějí.

10.1 Rocheův model a jednoduché odhady

Vzhledem k výrazné koncentraci hmoty směrem k centru hvězdy lze i ke studiu dvojhvězd velmi úspěšně využít Rocheův model, který je ovšem komplikovanější, než v případě osamocené rotující hvězdy. Předpokládáme opět, že hmotnost primární i sekundární složky je soustředěna do hmotných bodů o hmotnostech M_1 a M_2, ω označuje úhlovou oběžnou rychlost soustavy a $q = M_2/M_1$ je hmotový poměr.

Zvolme pravoúhlou souřadnou soustavu pevně spojenou se soustavou, která má počátek v bodě M_1 a jejíž osa X míří od M_1 k M_2, osa Y je na ni kolmá a leží v oběžné rovině a osa Z je kolmá na oběžnou rovinu, přičemž vzdálenost A mezi oběma hmotnými body zvolíme za jednotku vzdálenosti. Na infinitesimální tělísko o hmotnosti μ nacházející se v obecném bodě (x, y, z) budou působit tři síly: přitažlivosti obou hmotných bodů a odstředivá síla oběžného pohybu. Tyto síly mají tvar:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{M_1} &= -G\frac{\mu M_1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{r}_1, \quad \vec{F}_{M_2} = -G\frac{\mu M_2}{|\vec{r}_2|^3}\vec{r}_2, \quad \vec{F}_\omega = \mu\omega^2\vec{r}_3, \\ \vec{r}_1 &= (x, y, z), \quad \vec{r}_2 = (x-1, y, z), \\ \vec{r}_3 &= (x - \frac{M_2}{M_1+M_2}, y, 0). \end{aligned} \tag{329}$$

(Označme vzdálenost těžiště od bodů M_1 a M_2 jako x_1 a x_2. Platí zřejmě $x_1/x_2 = M_2/M_1$ a $x_2 = 1 - x_1$, z čehož dostaneme $x_1 =$

$M_2/(M_1+M_2)$. Tolik na vysvětlenou k souřadnici x vektoru $\vec{r}_3$.)

Označíme-li ještě

$$r_1 = |\vec{r}_1|, \quad r_2 = |\vec{r}_2|, \quad r_3 = |\vec{r}_3| \tag{330}$$

lze celkový potenciál oněch tří sil zapsat ve tvaru

$$W = \frac{GM_1}{r_1} + \frac{GM_2}{r_2} + \frac{1}{2}\omega^2 r_3^2. \tag{331}$$

Jestliže pro zjednodušení zápisu místo potenciálu W zavedeme potenciál $\Omega = W/GM_1$ a úhlovou oběžnou rychlost vyjádříme pomocí 3. Keplerova zákona

$$\omega^2 = G(M_1+M_2)A^{-3}, \quad A = 1 \quad \to \omega^2 = G(M_1+M_2), \tag{332}$$

noindent dostáváme rovnici ekvipotenciálních ploch ve tvaru

$$\begin{aligned}
&\Omega(x,y,z) = \frac{1}{r_1} + \frac{q}{r_2} + \frac{1}{2}(1+q)r_3^2 = \\
&(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + q((1-x)^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + \\
&\frac{1+q}{2}(x^2+y^2) - qx + \frac{q^2}{2(1+q)} = C,
\end{aligned} \tag{333}$$

kde C je konstanta odpovídající konkrétní ekvipotenciální ploše. Všimněme si ještě, že tvar ekvipotenciálních ploch je funkcí jediné proměnné, poměru hmot q.

Můžeme se opět ptát po místech, ve kterých je výsledná síla působící na testovací tělísko nulová. Pro ně platí

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0. \tag{334}$$

Z konkrétních výrazů pro uvedené derivace rovnice (333) plyne, že uvedená podmínka je pro druhé dvě rovnice splněna na ose X. Z první podmínky dostáváme rovnici

$$\frac{\partial\Omega(x,0,0)}{\partial x} = -\frac{x}{|x|^3} + \frac{q(1-x)}{|1-x|^3} + (1+q)x - q = 0. \tag{335}$$

V každém z intervalů $(-\infty,0)$, $(0,1)$ a $(1,\infty)$ lze odstranit absolutní hodnoty a přepsat rovnici (335) jako algebraickou rovnici 5. stupně v x s parametrem q. Dá se ukázat, že v každém z uvedených intervalů existuje právě jedno reálné řešení, takže na ose existují tři místa s nulovou výslednou silou. Těm se obvykle říká Lagrangeovy body L_1 – bod $(x_1, 0, 0)$ na spojnici mezi oběma hmotnými body, L_2 – bod $(x_2, 0, 0)$ ležící vně méně hmotného bodu M_2, a L_3 – bod $(x_3, 0, 0)$ ležící vně hmotnějšího bodu M_1. Rozborem druhých dvou rovnic lze zjistit, že další dva Lagrangeovy body L_4 a L_5 leží pro libovolný poměr hmot v oběžné rovině na vrcholech rovnostranného trojúhelníka s oběma hmotnými body.

Jak jsme se již zmiňovali u jednotlivých hvězd, význam ekvipotenciálních ploch spočívá v tom, že rovnovážná hvězda zaujme tvar některé z nich. Zvláště významná je kritická plocha obsahující bod L_1 – často zvaná Rocheova mez – která představuje mez dynamické stability dvojhvězdy.

Rocheův model byl využit při dodnes využívané fyzikální klasifikaci dvojhvězd na oddělené (obě složky mají rozměry menší než kritická plocha), polodotykové (jedna složka je uvnitř kritické plochy, druhá ji právě vyplňuje) a dotykové (obě složky zaplňují nebo překračují kritickou plochu a mají společnou atmosféru).

Praktický návod jak počítat rozměry kritické meze pro zvolený poměr hmot lze nalézt v apendixu práce Harmanec (1990).

10.2 Výpočet hvězdného vývoje ve stadiu výměny hmoty

Je zřejmé, že problém vývoje dvojhvězd je úloha, která zcela zřejmě a zásadním způsobem narušuje předpoklad sférické symetrie, úspěšně použitý v případě modelů osamocených hvězd. Jak jsme si ukázali pomocí Rocheova modelu, projeví se narušení nejen sférické, ale i osové symetrie ve chvílích, kdy hvězda expanduje na mez dynamické stability. Následný přenos hmoty mezi složkami probíhá formou plynného proudu, který vytéká z okolí Langrangeova bodu L_1 a je v důsledku Coriolisovy síly nevyhnutelně strháván ve směru oběžného pohybu hmotu ztrácející složky, v řadě případů – jak ukazují i nejnovější třírozměrné hydrodynamické modely – oblétne druhou hvězdu a při návratu složitě interaguje s původním proudem. Kolem hmotu přijímající složky se vytváří akreční disk a též sférická obálka a část plynu opouští dvojhvězdu a odnáší s sebou tedy jak část hmoty, tak i čast úhlového momentu soustavy.

Ze všech těchto důvodů – i přes velký pokrok ve výpočetní technice – fyzikálně konsistentní výpočty vývoje dvojhvězd ve fázi výměny hmoty dosud neexistují. Přesto existuje již od konce šedesátých let postup, jak výměnu hmoty ve dvojhvězdách alespoň zhruba modelovat, a jak si učinit představu, co asi můžeme u reálných soustav očekávat.

Vychází se z následujících zjednodušení:

- Počítá se jednorozměrný model hmotu ztrácející hvězdy, místo skutečné geometrie Rocheova modelu se za dosažení meze stability pokládá, když hvězda dosáhne takového poloměru, že se její objem rovná objemu odpovídající Rocheovy meze pro okamžitý poměr hmot obou složek. Ten lze dobře popsat jednoduchou aproximační formulí

$$\log R(t) = (0,38 + 0,2 \log \frac{M_1(t)}{M_2(t)}) \log A(t), \tag{336}$$

  kde $M_1(t)$, $M_2(t)$ a $A(t)$ označují hmotu složky, která hmotu ztrácí (a má poloměr $R(t)$), hmotu přijímající složky a vzdálenost středů obou hvězd v čase t.

- Předpokládá se, že veškerá hmota, která expanduje přes kritický poloměr daný vztahem (336) okamžitě odtéká směrem ke druhé složce dvojhvězdy. Hrubé odhady expanze plynu do vakua ukazují, že tento předpoklad je realistický.

- Ve všech výpočtech z počátečního období byl dále činěn předpoklad, že přenos hmoty je konservativní, t.j., že veškerá hmota, odtékající ze složky 1 je zachycena složkou 2 a že žádná hmota neuniká ze soustavy. Navíc se uvažoval jen úhlový moment soustavy související s oběžným pohybem a zanedbávaly se rotační úhlové momenty. Toto druhé zjednodušení je dosti přijatelné, neboť rotační momenty jsou ve srovnání s oběžným momentem podstatně menší. Za takových předpokladů platí zákon zachování hmoty

$$M_1(t) + M_2(t) = M_1(t_0) + M_2(t_0) \tag{337}$$

  a také zákon zachování celkového (oběžného) momentu hybnosti:

$$J = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} A v_K = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \frac{2\pi}{P} A^2. \tag{338}$$

Tento vztah lze ještě upravit pomocí 3. Keplerova zákona

$$A^3 = \frac{G}{4\pi^2} P^2 (M_1 + M_2) \tag{339}$$

do tvaru

$$J^2 = G \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1 + M_2} A, \tag{340}$$

což se pro případ konstantní celkové hmoty redukuje na podmínku

$$A(t).M_1^2(t).M_2^2(t) = A(t_0).M_1^2(t_0).M_2^2(t_0), \tag{341}$$

kde t_0 označuje čas počátku odtoku hmoty. V některých pracech z novější doby se uvažuje parametricky ztráta hmoty a úhlového momentu ze soustavy. Např. de Loore a De Greve (1992) předpokládají vztah ve tvaru

$$\frac{dM_2}{dt} = \beta \frac{dM_1}{dt}, \tag{342}$$

přičemž parametr β volí konstantní pro celou fázi výměny hmoty, obvykle roven 0,5. To je nepochybně určitý nedostatek, neboť lze předpokládat, že fázích rychlejšího přenosu hmoty je pravděpodobnost úniku hmoty ze soustavy větší, než ve fázích pomalých. Předpokládali tedy, že $(1 - \beta)$ z hmoty opouštějící složku 1 uniká ze soustavy. Ještě složitějším problémem je popsat ztrátu úhlového momentu. de Loore a De Greve (1992) předpokládali, že úhlový moment je úměrný celkové hmotnosti soustavy $M(t) = M_1(t) + M_2(t)$, čili

$$J \approx M^\gamma, \tag{343}$$

a změnu momentu hybnosti popisovali parametrickou rovnicí

$$\frac{\triangle J}{J} = 1 - (1 - \frac{\triangle M}{M})^\gamma, \tag{344}$$

kde konstantu γ po pokusech s modelováním s konkrétní dvojhvězdou volili rovnou 2,1.

- Model hmotu přijímající složky se obvykle nepočítá, pouze se registruje její okamžitá hmotnost tak, aby celková hmotnost soustavy zůstala zachována. Tím se modelování vyhne problému reálného popisu hydrodynamického přenosu hmoty mezi složkami. de Loore a De Greve (1992) ale při svých nekonservativních výpočtech vývoj hmotu přijímající složky modelovali, ovšem pouze tak, že přidávali příslušnou hmotnost o daném chemickém složení.

Je zřejmé, že za uvedených předpokladů můžeme pomocí rovnice (336) z poloměru hvězdy 1 a z hmotností obou složek vypočítat konstantu $A(t_0)$ a z ní pak v každém okamžiku počítat z rovnic (336) až (341) ekvivalentní poloměr Rocheovy meze v závislosti na měnícím se hmotovém poměru obou hvězd.

Výpočet ve fázi odtoku hmoty pak probíhá následovně: Model v čase $t+dt$ konstruujeme tak, že změníme hmotu hvězdy 1 z $M_1(t)$ na $M_1(t+dt) = M_1(t) + dM_1$, (kde $dM_1 < 0$) a pomocí rovnic (11.4) až (11.6) určíme nový ekvivalentní poloměr Rocheovy meze v čase $t + dt$. Dále změníme polohu bodu M_F, tedy hranice, kde je již třeba uvažovat neadiabatickou konvekci a neúplnou ionizaci v podpovrchových vrstvách, a to tak, aby bylo

$$\frac{M_F(t+dt)}{M_1(t+dt)} \leq \frac{M_F(t)}{M_1(t)}. \tag{345}$$

Prakticky to znamená, že je třeba vynechat jednu nebo několik prvních slupek v diferenčním schematu (tyto vrstvy "odtekly" směrem k povrchu hvězdy). Pokud slupky číslujeme od povrchu, musíme je v takovém případě ještě přečíslovat. Jinak řečeno, úloha je v nezávisle proměnné M_R nyní definována na intervalu $\langle 0, M_1(t) + dM_1\rangle$ místo původního intervalu $\langle 0, M_1(t)\rangle$.

Časový krok, který odpovídá ubýtku hmotnosti hvězdy 1 zvolíme nejprve zkusmo. Poté obvyklým způsobem spočteme nový model (1. superiteraci správného modelu) a jeho poloměr porovnáme s očekávaným ekvivalentním poloměrem Rocheovy meze. Pokud se obě hodnoty liší více než o požadovanou přesnost, zvolíme pomocí lineární interpolace nový časový krok a spočteme druhou superiteraci. To opakujeme tak dlouho, až je dosaženo požadované shody poloměrů.

Je rovněž důležité si uvědomit, že expanze povrchových vrstev a narušení tepelné rovnováhy vedou ke změnám zářivého toku i v podpovrchových vrstvách a rovnici tepelné rovnováhy (122), popisující změnu L_R od místa k místu, je i v nich proto třeba řešit. (Zde se právě vyplatí, jsou-li změny vnitřní energie popisovány přímo pomocí entropie, neboť se pak nedopouštíme žádných zanedbání v příslušných rovnicích.) Ve stádiích výměny hmoty je ovšem na začátku každého modelu třeba znovu spočítat povrchový trojúhelník v diagramu L vs. T_{eff} pro novou hmotu modelu. V rychlejších stádiích přenosu hmoty je to nutné dělat dokonce před každou superiterací.

Právě popsaný postup byl poprvé navržen v práci Kippenhahna a Weigerta (1967) a praxe ukazuje, že kromě velmi komplikovaných stádií stačí obvykle 1 až 3 superiterace k nalezení správného časového kroku mezi modely.

10.3 Některé výsledky modelování vývoje dvojhvězd

Je třeba si uvědomit, že vývoj dvojhvězd nabízí mnohem více kombinací, než vývoj osamocené hvězdy. Začátek stadia výměny hmoty mezi složkami zavisí na počáteční oběžné periodě soustavy a na hmotách obou složek, dalšími faktory jsou chemické složení a dosud ne dobře prostudovaná dynamika přenosu (množství hmoty a momentu unikajících ze soustavy).

Z vývoje osamocených hvězd víme některá fakta.

- Během vývoje od hlavní posloupnosti nulového věku dosahuje hvězda postupně několika lokálních maxim svého poloměru. Ne každé následující maximum je nutně vetší než poslední předchozí, avšak absolutním maximem je určitý okamžik ve stadiu veleobra na konci oné části vývoje, která je určována jadernými reakcemi.
- Životní doba pobytu hvězdy na hlavní posloupnosti je klesající funkcí hmotnosti hvězdy. To pro dvojhvězdy znamená (při rozumném předpokladu, že obě složky dvojhvězdy vznikly současně), že dříve bude expandovat vždy hmotnější z nich. Často se pro ni volí termín primární složka či primár.

Z rovnice (336) je zřejmé, že kritická hodnota poloměru, přes níž hvězda nemůže dále expandovat, aniž by ztrácela hmotu směrem k druhé složce, závisí pouze na poměru hmotností obou složek a na jejich vzdálenosti. Jak jsme se už zmínili, je-li vzdálenost mezi složkami dosti malá, může k výměně hmoty dojít ještě během pobytu primární složky na hlavní posloupnosti. Kippenhahn a Weigert (1967) nazvali tuto situaci *případ A (case A)* výměny hmoty a toto označení se ujalo. *Případem B* výměny hmoty se označuje situace, kdy k překročení Rocheovy meze primární složkou dojde teprve v období rychlé expanze poloměru hvězdy po vyhoření vodíku v jejím jádru.

Plavec (1968) odvodil vztahy, pomocí kterých lze pro konkrétní dvojhvězdu odhadnout kritické hodnoty oběžné periody pro to, aby došlo k některému případu výměny hmoty s použitím výpočtů vývoje osamocených hvězd pro chemické složení $X = 0,708$ a $Z = 0,02$:

$$\begin{aligned} \log P^0 &= 0,441 \log M_1 - 1,06 - s(q), & (346)\\ \log P^I &= 0,731 \log M_1 - 0,86 - s(q), & (347)\\ \log P^{II} &= 2,201 \log M_1 - 0,04 - s(q), & (348) \end{aligned}$$

kde $s(q) = 1,5 \log r + 0,5 \log(1+q)$, přičemž $r = R/A$ je střední relativní poloměr Rocheovy meze (viz rovnice (336) a $q = M_2/M_1$ je hmotový poměr mezi sekundární a primární složkou.

Případ A výměny hmoty nastane, pokud oběžná perioda soustavy leží mezi P^0 a P^I a případ B, je-li perioda mezi P^I P^{II}. Např. pro primární hvězdu o hmotnosti 15 $m_\odot$ dojde k případu A výměny hmoty pro oběžné periody kratší než $2\overset{d}{,}88$ pro $q = 1$ nebo pro oběžnou periodu menší než $2\overset{d}{,}30$ pro $q = 0,2$. Pro hvězdu o hmotnosti 3 $m_\odot$ je nejlepší možná perioda umožňující ještě výměnu hmoty v případě A rovna $0\overset{d}{,}93$. *Případ B* výměny hmoty pro primár o hmotnosti 15 $m_\odot$ nastane, pokud je oběžná perioda kratší než $1202\overset{d}{,}0$. Pro primár o hmotnosti 3 $m_\odot$ činí tato mez $37\overset{d}{,}5$.

První realistické modely Ačkoliv první pokusy o modelování výměny hmoty byly činěny již roku 1960, lze za první dostatečně realistický výpočet považovat sekvenci modelů publikovaných Kippenhahnem a Weigetrem (1967).

Popišme si průběh vývoje dvojhvězdy o původní hmotnostech 4 a 3,2 $m_\odot$, jak jej propočetl Harmanec (1970). Na počátku vývoje měla uvažovaná soustava oběžnou periodu $1\overset{d}{,}785$ a ke kontaktu primární složky s mezí stability došlo po vyčerpání vodíku v jejím jádru, 93,5 milionů let od hlavní posloupnosti nulového věku. Poloměr primáru činil dvojnásobek poloměru na počátku hlavní posloupnosti, 4,78 $R_\odot$. Obálka hvězdy v té době expandovala v důsledku tepelné nestability v jádru, a ztráta hmoty z povrchových vrstev tuto nestabilitu ještě urychlila. Přenos hmoty se proto v prvním stadiu prudce zrychluje. Tomu napomáhá i zmenšující se vzdálenost mezi složkami. Za 84000 let od začátku odtoku mají obě složky stejnou hmotnost 3,6 $m_\odot$ a vzdálenost mezi nimi dosahuje minima. Od toho momentu vede pokračující výměna hmoty k narůstání vzdálenosti mezi složkami, což přirozeně brzdí rychlost přenosu a po 110000 letech od začátku odtoku tento vliv převládne nad vlivem tepelné nestability, rychlost přenosu hmoty dosáhne svého maxima 9.10^{-6} $m_\odot$ za rok a počíná klesat. Hmotnost primární hvězdy činí v té chvíli 3,37 $m_\odot$.

Po 127800 letech se původní hmotový poměr mezi složkami vymění. Klesající efektivní teplota vede – podobně jako při vývoji osamocené hvězdy – k poklesu ionizace v podpovrchových vrstvách hvězdy a s tím souvisejícím vznikem konvektivní zóny. Asi po 400000 letech od začátku odtoku začne tato konvektivní zóna prudce narůstat směrem do nitra hvězdy.

Je dobře si uvědomit, že vnitřní části hvězdy se téměř po celou dobu přenosu hmoty chovají značně autonomním a vcelku neměnným způsobem: rovnoměrně se smršťují, aby kompensovaly nestabilitu vzniklou zánikem centrálního nukleárního zdroje energie. Určité změny jsou však patrné. Centrální teplota v poměru k centrální hustotě hned na začátku odtuku začíná narůstat prudčeji než před jeho začátkem. To je chování právě opačné, než jaké ukazují modely výměny hmoty v případě A. Tam totiž centrální teplotu určuje především produkce nukleární energie a ta s úbytkem hmotnosti hvězdy přirozeně klesá. Na začátku odtoku v případě A klesá proto i centrální teplota.

K pochopení průběhu přenosu hmoty je třeba povšimnout chování hlavního zdroje energie v daném případě: vodíkové slupky. Oblast, v níž probíhá slučování vodíku na helium se během celého odtoku absolutně i relativně zmenšuje. Maximum produkce se přitom během první části odtoku zvolna přesouvá směrem k centru, a to jak v poloměru, tak ve hmotě. To souvisí s rostoucí teplotou a hustotou centrálních částí hvězdy. Energetický výkon slupky ale současně klesá. To je způsobeno jednak tím, že klesá hustota a teplota vnějších častí slupky, neboť tyto vrstvy během ztráty hmoty expandují zčásti na úkor své vnitřní energie, a za druhé proto, že ve spodních částech slupky rychle ubývá vodíku. Úbytek vodíku nakonec způsobí, že se (klesající) maximum hoření vodíku ve slupce začne přesouvat směrem k povrchu ve hmotě.

Postupně prakticky zanikne původní tepelná nestabilita vnějších vrstev hvězdy, vyvolaná ztrátou hmoty, a další odtok hmoty již probíhá pouze pod vlivem tepelné nestability v jádru. Tím samozřejmě ubude i pohlcování zářivé a vnitřní energie v obalu a 472900 let po začátku odtoku dosáhne zářivý výkon hvězdy minima a začíná opět narůstat. K tomuto růstu přispěly ještě další důvody. Přechod na konvektivní přenos energie ve vnějších částech hvězdy vytvořil (podobně jako u vývoje osamocené hvězdy) lepší podmínky pro hoření vodíku ve skupce, takže produkce energie v ní začíná růst. Mimo to se již hvězda v té době zbavila již všech vrstev s původním chemickým složením a u povrchu se proto mění i velikost rozptylu zářivé energie.

Konvektivní zóna má ještě jiný důsledek: rychlejší růst poloměru hvězdy a následkem toho i přechodné druhé maximum přenosu hmoty v čase 720000 let od začátku odtoku, asi $2,5.10^{-6}$ $m_\odot$ za rok. Poté se rozloha konvektivní zóny i rychlost ztráty hmoty opět zmenšují a asi po 1113800 letech, kdy dosáhne minima i efektivní teplota, končí rychlá fáze odtoku. Další vývoj je určován již jen tepelnou nestabilitou jádra hvězdy. Rychlost odtok hmoty v té době činí asi 4.10^{-7} $m_\odot$ za rok a dále se zpomaluje. Efekty ztráty hmoty z povrchu hvězdy jsou v té době už tak malé, že se hvězda chová prakticky stejně jako osamocená hvězda původní hmotnosti v podobném vývojovém stadiu. Růst centrální teploty pokračuje a za 2080000 let od počátku odtoku začíná v jádru docházet k nukleární syntéze helia na uhlík a v čase 2410000 vzniká v centru nová konvektivní zóna. Narůstání produkce v jádru ovšem zhorší podmínky pro hoření ve vodíkové slupce, obal hvězdy přestane růst a 2517900 let po začátku odtoku fáze výměny hmoty končí. Původně primární hvězda má nyní hmotnost pouhých 0,53 $m_\odot$, ale poloměr 25,0 $R_\odot$ a obsah vodíku na povrchu činí pouze 0,256 proti původního 0,602. Oběžná perioda dvojhvězdy se prodloužila na $84\overset{d}{.}2$ a poměr hmot se z původního poměru $M_2/M_1 = 0,8$ více než převrátil na $M_1/M_2 = 0,079$.

Konkrétní výpočet, který jsme použili jako ilustrační příklad, pokračoval i po skončení výměny hmoty. Původně primární složka v důsledku rostoucí produkce hoření helia v jádru rychle kontrahuje a zahřívá se, takže roste efektivní teplota, postupně mizí podpovrchová konvektivní zóna a hvězda se přesouvá v HR diagramu z oblasti obrů až do blízkosti hlavní posloupnosti heliových hvězd. V čase 11599800 let od začátku výměny hmoty hvězda konečně znovu dosáhne stavu tepelné rovnováhy a lokálního minima svého zářivého výkonu. Je zajímavé si uvědomit, že se tak stalo až v době, kdy obsah helia v jádru v důsledku nukleání přeměny již poklesl zhruba na polovinu ($Y = 0,484$). Původně hmotnější složka dvojhvězdy je v té době horkým trpaslíkem s poloměrem pouhých 0,208 $R_\odot$.

Výsledky vývoje ve dvojhvězdě mohou být velmi rozmanité. Konkrétní výpočty ukazují, že vývoj heliové hvězdy může vést k dalšímu přenosu hmoty ještě dříve, než se stačí k mezi nestability přiblížit původně sekundární složka, opačný případ je však častější. V tom případě se může stát, že se začne přenášet hmota na horkou kompaktní hvězdu, na jejímž povrchu tak může dojít i k nukleárnímu hoření a k eruptivním jevům. Obecně lze ale uzavřít, že pokud k výměně hmoty dojde v kterékoliv fázi vývoje hvězdy, ve které z důvodů změn její vnitřní stavby dochází právě k růstu poloměru, vede překročení meze stability ve dvojhvězdě k fázi mohutné výměny hmoty mezi složkami, při které se původní hmotový poměr více než vymění.

10.4 Modely vývoje dvojhvězd versus pozorování

Prvním problémem, který se výpočty výměny hmoty ve dvojhvězdách pokoušely vyřešit, byl t.zv. vývojový paradox polodotykových soustav. Když totiž byly získany údaje o základních fyzikálních vlastnostech dostatečného počtu dvojhvězd a když začala být po roce 1950 využívaná klasifikace dvojhvězd na oddělené, polodotykové a kontaktní, ukázalo se, že ve všech případech zaplňovala Rocheovu mez u polodotykových soustav *méně hmotná* sekundární složka. V té době bylo už z teorie stavby hvězd jasné, že rychleji by se měla ve dvojhvězdě vyvíjet a k Rocheově mezi expandovat hmotnější z obou složek. A pozorování se zdála ukazovat pravý opak.

Se skvělým fyzikálním citem navrhl možné vysvětlení zdánlivého paradoxu Crawford (1955). Postuloval, že rychleji se bude skutečně vyvíjet hmotnější složka a že dojde k výměně hmoty, která obrátí původní poměr hmot. Jeho hypotéze velmi vytrvale oponoval astronom českého původu Zdeněk Kopal.[1] Trvalo více než 10 let, než byla Crawfordova hypotéza výpočty výměny hmoty výtečně kvalitativně potvrzena. Vtip spočívá v tom, že rychlá počáteční fáze výměny hmoty, během níž se původní poměr hmot převrátí, probíhá vůči ostatním fázím vývoje tak rychle, že máme statisticky velmi malou šanci podobný systém pozorovat.

Po úspěšném vyřešení vývojového paradoxu se začali astronomové přirozeně zajímat, zda i další výsledky výměny hmoty by bylo možno ztotožnit s nějakými pozorovanými systémy. Kříž a Harmanec (1975) formulovali obecnou hypotézu, která ztotožňuje produkty výměny hmoty v pozdějších stádiích se hvězdami se závojem. Hypotéza nabízela vysvětlení vzniku závojů kolem těchto hvězd, důvod jejich velké rotační rychlosti a také vysvětlení některých typů pozorovaných změn. Určitý počet dvojhvězd s očekávanými vlastnostmi se pak skutečně podařilo mezi hvězdami se závojem objevit. Dnes se soudí, že navržený mechamismus je jedním z možných, nemůže však být jediným, neboť se nepodařilo nalézt očekavané procento zákrytových dvojhvězd mezi hvězdami se závojem.

Dnes se výměna hmoty považuje za integrální součást ve vývoji dvojhvězd a existují četné více či méně propracované scénáře. Např. Habets (1987) předpokládá, že první fáze výměny hmoty ve hmotné dvojhvězdě vede skutečně ke vzniku hvězdy se závojem a ke vzrůstu oběžné periody, i při částečné ztrátě hmoty a úhlového momentu ze soustavy. Rovněž bral v potaz přenos a ztrátu hmoty ve formě hvězdného větru ještě před tím, než hvězda dosáhla Rocheovy meze. Další přenos hmoty z původně primární složky nastává ve fází hoření helia a uhlíku a hvězda nakonec vybuchne jako supernova, což vede ke vzniku výstředné dráhy, ve které se pohybuje zbytek supernovy – neutronová hvězda – a hmotná hvězda, která během fází přenosu získala hmotu. Ta se při průchodu pericentrem stává opa-

[11] Osobně se domnívám, že to bylo způsobeno tím, že Kopal byl svým založením spíše matematik a neměl dostatečné znalosti o stavbě a vývoji hvězd, neboť lze v literatuře doložit, že jiní astronomové Crawfordovu myšlenku přijali s porozuměním ještě před tím, než byla modelovými výpočty potvrzena.

kovaně dynamicky nestabilní a posílá hmotu směrem k neutronové hvězdě, což vede ke vzniku rentgenova záření. Konečným stádiem vývoje hmotné dvojhězdy může být i binární pulsar. Rostoucí nejistota těchto scénářů s rostoucím stádiem vývoje spočívá v naší neznalosti skutečných mechamismů ztráty hmoty a úhlového momentu ze soustavy, o nichž byla již řeč úvodem.

11 Test vnitřní struktury hvězd pomocí apsidálního pohybu

Již dlouhou dobu je známo, že některých dvojhvězd ve výstředných drahách lze využít k mapování vnitřní struktury jejich složek. Pokud by dvojhvězda ve výstředné dráze sestávala ze dvou hmotných bodů, bude její potenciál odpovídat Keplerově dráze a oběžný pohyb bude eliptický a ve stabilní dráze. Jakmile však hvězdy zaujímají konečný objem některé ekvipotenciální plochy nebo jakmile se uplatní relativistické efekty, dochází k narušování eliptického pohybu.

11.1 Apsidální pohyb v klasické mechanice

Podrobné modelování pomocí harmonických funkcí vedlo ke zjištění, že rozložení hmoty ve hvězdě vede k postupnému stáčení přímky apsid ve směru oběžného pohybu, zatímco výstřednost oběžné dráhy se nemění. Je-li oběžná perioda dvojhvězdy udána ve dnech a $q = M_2/M_1$ opět označuje hmotový poměr, pak pro změnu délky periastra ω ve stupních za časovou jednotku, v níž je udána oběžná perioda, platí v klasické mechanice následující rovnice:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_c &= \frac{360}{P}(k_{2,1}(15qf(e) + (1+q)g(e))r_1^5 + \\ &\quad k_{2,2}(15q^{-1}f(e) + (1+q^{-1})g(e))r_2^5 \end{aligned} \tag{349}$$

kde

$$f(e) = (1-e^2)^{-5}(1 + 3e^2/2 + e^4/8) \tag{350}$$

$$g(e) = (1-e^2)^{-2}(\Omega/\Omega_K)^2 \tag{351}$$

a r_1 a r_2 označují poloměry primární a sekundární složky, vyjádřené v jednotkách hlavní poloosy oběžné dráhy A.

Členy s funkcí $f(e)$ vznikají díky slapové deformaci hvězdy, členy s $g(e)$ souvisejí s rotační deformací, přičemž Ω_i označuje úhlovou rotační rychlost i-té hvězdy ($i = 1, 2$) a $\Omega_K = 2\pi/P$ je Keplerova střední úhlová oběžná rychlost.

Konstanta vnitřní struktury k_2 je rovna nule pro hmotný bod a dosahuje hodnoty 0,75 pro zcela homogenní hvězdu. Ze sférických modelů stavby hvězd ji lze spočítat podle vztahu

$$k_2 = \frac{16\pi}{5MR^5} \int_0^R \rho r^7 dr \tag{352}$$

a např. v práci Clareta a Giméneze (1992) je tato konstanta tabelována pro rozsáhlou síť vývojových modelů hvězd o různé hmotnosti.

Je ovšem zřejmé, že pozorovaný apsidální pohyb dvojhvězdy je důsledkem rozložení hmoty uvnitř *obou těles* a proto z něj lze určit pouze váhovaný střed

$$k_2 = \frac{c_1 k_{2,1} + c_2 k_{2,2}}{c_1 + c_2}, \tag{353}$$

kde c_1 a c_2 představují koeficienty u $k_{2,1}$ a $k_{2,2}$ v rovnici (349). Pro dvojhvězdu se stejnými hmotnostmi složek je tedy takový test nejspolehlivější.

11.2 Relativistický apsidální pohyb

Relativistický apsidální pohyb se řídí následujícím vztahem, který poprvé odvodili Levi-Civita (1937) a Robertson (1938):

$$\dot{\omega}_r = \frac{6\pi G}{c^2} \frac{M_1 + M_2}{AP(1 - e^2)}, \tag{354}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu a rychlost stáčení periastra je v radiánech za tu jednotku času, ve které se měří oběžná perioda. Vzdálenost složek lze ještě eliminovat s použitím 3. Keplerova zákona a rychlost stáčení udat ve stupních za jednotku času. Dostáváme tak vztah

$$\dot{\omega}_r = \frac{(\pi G)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{5038848000}}{c^2} \frac{(M_1 + M_2)^{\frac{2}{3}}}{P^{\frac{5}{3}}(1 - e^2)}. \tag{355}$$

Je vidět, že relativistický apsidální pohyb závisí na celkové hmotnosti dvojhvězdy. U kompaktních objektů jako jsou binární pulsary nehraje klasický apsidální pohyb prakticky žádnou roli a proto lze relativistický apsidální pobyb daný vztahy (354) či (355) využít k přesnému určení hmotnosti soustavy. Např. u binárního pulsaru PRS 1913+16 činí stáčení přímky apsid plných 4,°2 ročně.

Výhodnější výraz pro relativistický apsidální pohyb lze ovšem získat tak, že ještě nahradíme hmotnosti složek polovičními amplitudami křivek radiálních rychlostí. Nejenže tím získáme vztah přímo použitelný na pozorovaná data, ale zvýšíme tím i přesnost určení, neboť z výrazu zcela zmizí gravitační konstanta G. Dostáváme tak

$$\dot{\omega}_r = \frac{1080}{c^2}\frac{(K_1+K_2)^2}{P\sin^2 i}. \tag{356}$$

11.3 Celkový apsidální pohyb

U obecné dvojhvězdy je stáčení přímky apsid součtem klasického a relativistického stáčení a pro pozorovanou rychlost stáčení $\dot{\omega}$ přirozeně platí

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_c + \dot{\omega}_r. \tag{357}$$

Označíme-li symbolem U periodu úplné rotace přímky apsid, platí

$$U = \frac{360}{\dot{\omega}}. \tag{358}$$

Chceme-li ovšem zjistit, jak se pozorované stáčení přímky apsid shoduje s hodnotou konstanty vnitřní stavby k_2, předpovězenou z klasické mechaniky, musíme nejprve spočítat relativistický příspěvek $\dot{\omega}_r$ z rovnice (356), ten odečíst od pozorované hodnoty stáčení, tedy

$$\dot{\omega}_c = \dot{\omega} - \dot{\omega}_r. \tag{359}$$

a poté spočítat pozorovanou hodnotu konstanty vnitřní stavby podle vztahu

$$k_2 = \frac{P\dot{\omega}_c}{360}\frac{1}{c_1+c_2}. \tag{360}$$

Hodnoty k_2 vypočtené z modelů stavby hvězd jsou obvykle řádově $10^{-3} - 10^{-2}$.

12 Jednoduché modely a odhady

Nejen z historických důvodů, ale i pro pochopení některých souvislostí a často používaných vztahů je užitečné se seznámit s jednoduchými modely hvězd. Začneme připomenutím termodynamických dějů.

12.1 Polytropní děj

Polytropní změna je taková změna stavu, při které zůstává specifické teplo konstantní, tedy

$$\frac{dQ}{dT} = C = konst. \tag{361}$$

Speciální případ, kdy $C = 0$ se nazývá adiabatickým dějem, případ, kdy $C = C_P$ se nazývá dějem isobarickým, případ $C = C_V$ dějem isochorickým a případ, kdy $C \to \infty$ je dějem isotermickým.

Jak jsme si již ukázali, závisí vnitřní energie ideálního plynu pouze na jeho teplotě a ne na hustotě, tedy

$$U_g = U_g(T). \tag{362}$$

To není ovšem pravda pro směs ideálního plynu a záření. Jak plyne z rovnice (**??**), závisí vnitřní energie záření i na hustotě, které je nepřímo úměrná. Vnitřní energii směsi ideálního plynu a záření můžeme ovšem zapsat s pomocí poměru tlaku plynu k celkovému tlaku β ve tvaru

$$U = \frac{3}{2}\frac{\Re T}{\mu} + \frac{aT^4}{\rho} = \frac{3}{2}\frac{\Re T}{\mu}\frac{2-\beta}{\beta}, \tag{363}$$

neboť $aT^4 = 3P(1-\beta)$ a $1/\rho = \Re T/\beta\mu P$.

V mnoha případech reálných hvězd představuje tlak záření jen asi dvě procenta celkového tlaku ve hvězdě a není proto pro orietační úvahy takovým "hříchem", jestliže učiníme předpoklad, že β je v celé hvězdě *konstantní*. V tom případě bude i celková vnitřní energie směsi ideálního plynu a záření pouze funkcí teploty a první věta termodynamická nabude tvar

$$dQ = \frac{dU}{dT}dT + PdV. \tag{364}$$

Připomeneme-li si ještě, že specifické teplo C je změna tepelné energie s teplotou, plyne z (364) výraz pro specifické teplo při konstantním objemu ($dV = 0$)

$$C_V = \frac{dU}{dT} \tag{365}$$

Za předpokladu *konstantního* β můžeme stavovou rovnici ve tvaru

$$\beta PV = \Re T \tag{366}$$

diferencovat a dostáváme

$$PdV + VdP = \Re\beta^{-1}dT. \tag{367}$$

Dosazením do rovnice (364) dostáváme

$$dQ = \left(\frac{dU}{dT} + \Re\beta^{-1}\right) dT - VdP, \tag{368}$$

takže pro specifické teplo při konstantním tlaku ($dP = 0$) dostáváme

$$C_P = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{\mathrm{P=const.}} = \frac{dU}{dT} + \Re\beta^{-1}. \tag{369}$$

Platí tedy vztah

$$C_P - C_V = \Re\beta^{-1}. \tag{370}$$

S použitím vztahů (361), (364), (365) a (366) tedy pro polytropní děj dostáváme

$$(C_V - C)dT + \frac{\beta^{-1}\Re T}{V}dV = 0, \tag{371}$$

což lze ještě s pomocí vztahu (370) upravit na tvar

$$(C_V - C)\frac{dT}{T} + (C_P - C_V)\frac{dV}{V} = 0. \tag{372}$$

Definujeme-li symbol γ vztahem

$$\frac{C_P - C}{C_V - C} = \gamma, \tag{373}$$

platí ovšem

$$\frac{C_P - C_V}{C_V - C} = \gamma - 1 \tag{374}$$

a rovnici (372) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0 \tag{375}$$

a po integraci tedy

$$TV^{\gamma-1} = konst. \tag{376}$$

Násobíme-li tuto rovnici stavovou rovnicí (366) a předpokládáme-li nadále, že β je všude konstantní, dostáváme tedy

$$PV^{\gamma} = const. \tag{377}$$

Polytropní děje bývá zvykem charakterizovat indexem n, který souvisí s exponentem γ vztahem

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n}. \tag{378}$$

Obecnou rovnici pro polytropní děj můžeme tedy ještě přepsat do tvaru

$$P = K\rho^{\frac{1+n}{n}}, \tag{379}$$

kde konstanta K obsahuje i střední molekulovou hmotnost částic μ.

Uvažme nyní konkrétní případ polytropy pro směs ideálního plynu a záření, jak jsme je uvažovali v úvodních kapitolách. Celkový tlak lze formálně vyjádřit jednak pomocí tlaku plynu, jednak pomocí tlaku záření; bude zřejmě

$$P = \frac{P_g}{\beta} = \frac{1}{\beta}\frac{\Re\rho T}{\mu}, \quad P = \frac{P_r}{1-\beta} = \frac{1}{1-\beta}\frac{aT^4}{3}. \tag{380}$$

Porovnáním obou vztahů pro celkový tlak můžeme tedy získat následující výraz pro teplotu

$$T^3 = \frac{3\Re}{a\mu}\frac{1-\beta}{\beta}\rho \tag{381}$$

Dosazením teploty do stavové rovnice pro směs plynu a záření tedy dostáváme výraz

$$P = K\rho^{\frac{4}{3}}, \tag{382}$$

kde konstanta K je dána výrazem

$$K = \left[\frac{3(1-\beta)}{a}\left(\frac{\Re}{\mu\beta}\right)^4\right]^{\frac{1}{3}}. \tag{383}$$

Vidíme tedy, že výraz (382) odpovídá polytropě s indexem $n = 3$ a formálně se shoduje s výrazem (54) pro relativistickou elektronovou degeneraci. Výraz (52) pro nerelavistickou elektronovou degeraci lze analogicky popsat polytropou s indexem $n = 3/2$.

12.2 Laneova-Emdenova diferenciální rovnice

Rovnici hydrostatické rovnováhy lze pro sférickou hvězdu psát pomocí gravitačního potenciálu Φ. Gravitační zrychlení čili síla působící na jednotku hmoty je záporně vzatým gradientem potenciálu, tedy

$$-\frac{d\Phi}{dR} = \frac{GM_R}{R^2} = \frac{G}{R^2}\int\limits_0^R 4\pi R^2\rho dR. \tag{384}$$

Tuto rovnici můžeme derivovat podle R s přihlédnutím k rovnici kontinuity ve tvaru (67) a dostáváme

$$-\frac{d^2\Phi}{dR^2} = 4\pi G\rho - \frac{2G}{R^3}\int\limits_0^R 4\pi R^2\rho dR = \tag{385}$$

$$= 4\pi G\rho + \frac{2}{R}\frac{d\Phi}{dR}, \tag{386}$$

což lze ještě upravit na tvar

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{d\Phi}{dR} + 4\pi G\rho = 0. \tag{387}$$

Protože vzhledem k výše uvedenému můžeme rovnici hydrostatické rovnováhy psát také ve tvaru

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dR} = -\frac{d\Phi}{dR}, \tag{388}$$

lze psát

$$dP = \rho d\Phi. \tag{389}$$

S využitím obecné rovnice polytropy (379) tedy dostáváme

$$\rho d\Phi = dP = \frac{n+1}{n}K\rho^{\frac{1}{n}}d\rho. \tag{390}$$

Po úpravě tedy

$$d\Phi = \frac{n+1}{n}K\rho^{\frac{1-n}{n}}d\rho. \tag{391}$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$\Phi + konst = K(n+1)\rho^{\frac{1}{n}}. \tag{392}$$

Jestliže zvolíme nulový bod potenciálu na povrchu hvězdy, kde předpokládáme $\rho = 0$, bude konstanta rovnice (392) nulová a dostaneme

$$\rho = \left(\frac{\Phi}{K(1+n)}\right)^n, \tag{393}$$

takže rovnici (387) můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{d\Phi}{dR} + \frac{4\pi G}{[(1+n)K]^n}\Phi^n = 0. \tag{394}$$

Jestliže označíme

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G}{[(1+n)K]^n}\Phi_c^{n-1} = \frac{4\pi G}{(1+n)K}\rho_c^{\frac{n-1}{n}} \tag{395}$$

a zavedeme nové proměnné φ a z pomocí vztahů

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_c} \quad \text{a} \quad z = \alpha R, \tag{396}$$

kde Φ_c je hodnota Φ v centru hvězdy, bude zřejmě

$$\frac{d\Phi}{dR} = \Phi_c \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dR} = \alpha\Phi_c\frac{d\varphi}{dz}, \tag{397}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\Phi}{dR}\right)\frac{dz}{dR} = \alpha^2\Phi_c\frac{d^2\varphi}{dz^2}, \tag{398}$$

$$\frac{2}{R}\frac{d\Phi}{dR} = \frac{2\alpha^2}{z}\Phi_c\frac{d\varphi}{dz}. \tag{399}$$

Rovnici (394) lze pak přepsat do tvaru diferenciální rovnice Laneovy-Emdenovy

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d\varphi}{dz} + \varphi^n = 0. \tag{400}$$

Jiný možný zápis Laneovy-Emdenovy rovnice zřejmě je

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d\varphi}{dz}\right) + \varphi^n = 0. \tag{401}$$

Tato rovnice se obecně řeší numericky pomocí rozvoje v řadu. Analytická řešení existují pro polytropní indexy $n = 0$, $n = 1$ a $n = 5$.

12.3 Polytropní modely hvězd

Řešení pro $n = 0$ je

$$\varphi(z) = 1 - \frac{z^2}{6}. \tag{402}$$

Protože podle (393) platí

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{\Phi}{\Phi_c}\right)^n = \varphi^n, \tag{403}$$

dostáváme pro toto řešení

$$\rho(R) = \rho_c\varphi^0 = \rho_c, \tag{404}$$

neboli homogenní hvězdu s konstantní hustotou.

Pro $n = 1$ má řešení tvar

$$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z} \tag{405}$$

a konečně pro $n = 5$

$$\varphi(z) = \left(1 + \frac{z^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{406}$$

Povšimněme si, že důsledkem řešení pro $n = 5$ je, že povrch hvězdy, kde je podle naší volby $\Phi = 0$ a tedy také $\varphi = 0$, odpovídá nekonečně velké hodnotě z a tedy i R. Jinými slovy, hvězda stavěná podle polytropy $n = 5$ se rozprostírá do nekonečna.

Význam polytropních modelů spočívá v tom, že pomocí nich lze činit určité odhady vnitřní stavby hvězd. Jak jsme již viděli, lze např. pomocí rovnice (403) počítat hustotu v libovolném bodě hvězdy ze znalosti hustoty v centru.

Podobně lze odvodit odhad pro tlak; kombinací rovnic (379) a (393) dostáváme

$$P = \frac{\rho\Phi}{n+1}, \tag{407}$$

z čehož výplývá vztah

$$P = P_c\varphi^{n+1}. \tag{408}$$

Pro hmotu v kouli o poloměru R můžeme psát s využitím rovnice (403)

$$M_R(R) = \int_0^{R_*} 4\pi\rho R^2 dR = 4\pi\rho_c \int_0^{R_*} \varphi^n R^2 dR, \tag{409}$$

kde R_* označuje poloměr hvězdy. Protože podle zavedené transformace (396) je poměr R/z konstantní, můžeme poslední rovnici dále upravit na

$$M_R(z) = 4\pi\rho_c \frac{R^3}{z^3} \int_0^{z_*} \varphi^n z^2 dz, \tag{410}$$

kde z_* opět představuje hodnotu této proměnné na povrchu hvězdy. Integrál na pravé straně této rovnice lze ovšem vyjádřit z Laneovy-Emdenovy rovnice (401), takže dostáváme

$$M_R(z) = 4\pi\rho_c R^3 \left(-\frac{1}{z}\frac{d\varphi(z)}{dz}\right), \tag{411}$$

přičemž mezi R a z platí transformace (396).

Je přirozeně možné zavést také střední hustotu hvězdy zřejmým vztahem

$$\bar{\rho} = \frac{3M_*}{4\pi R_*^3}, \tag{412}$$

kde pro hmotnost hvězdy M_* platí rovnice (411) pro $z = z_*$.

Hodnoty z_*, $-z_*^2 \frac{d\varphi(z_*)}{dz}$ a $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$ byly pro různé hodnoty polytropního indexu n numericky spočteny a tabelovány, takže pomocí nich bylo možno pro hvězdu o dané hmotnosti a poloměru počítat její vnitřní strukturu.

Pro zajímavost - polytropní model Slunce pro $n = 3$ vede k centrální teplotě Slunce 12 milionů K, což je velmi slušný odhad vůči současným nejlepším modelům, které udávají centrální teplotu Slunce 15,4 milionů K.

Uvažme ještě, jak lze konstruovat polytropní modely pro dané K a n. Funkce $\varphi(z)$ a $\dot{\varphi}(z)$ lze získat integrací Laneovy-Emdenovy rovnice. Z rovnice (403) pak dostáváme hustotu jakou známou funkci z

$$\rho = \rho_c \varphi^n. \tag{413}$$

Rovněž si můžeme všimnout, že podle vztahu (395) platí

$$\left(\frac{R}{z}\right)^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1-n}{n}}. \tag{414}$$

Tuto rovnici lze použít k určení centrální hustoty pomocí poloměru hvězdy R_* a odpovídající hodnoty z_* získané integrací Laneovy-Emdenovy rovnice. Plyne z ní rovněž, že

$$R_* \sim \rho_c^{\frac{1-n}{2n}}. \tag{415}$$

Vidíme tedy, že pro všechny polytropní modely s $n > 1$ je poloměr hvězdy klesající funkcí její centrální hustoty.

Z rovnice (411) plyne, že

$$M_* \sim \rho_c R_*^3 \sim \rho_c^{\frac{3-n}{2n}}. \tag{416}$$

Zmínili jsme se již, že jedna polytropa s indexem $n = 3$ odpovídá stavové rovnici relativisticky degenerovaného elektronového plynu.

Podle právě uvedené rovnice hmotnost takto konstruované hvězdy nezávisí na centrální hustotě a pro numerické hodnoty odpovídající relativisticky degenerovanému elektronovému plynu je dána vztahem

$$\frac{M_*(\text{mezní})}{\mathrm{M}_\odot} = \frac{5,836}{\mu_e^2}. \tag{417}$$

To je slavná Chandrasekharova mez. Všimněme si, že pro kompaktní hvězdy, které již prodělaly nukleární vývoj, můžeme předpokládat $X = 0$ a tedy $\mu_e = 2$, což pro ně dává limitní hmotnost 1,459 $\mathrm{m}_\odot$.

12.4 Radiální pulsace sférických hvězd

Úvahy o dynamické stabilitě či nestabilitě hvězd vůči pulsacím mohou vycházet z následující úvahy: Během oscilace se termodynamický stav elementu hmoty v pulsující hvězdě periodicky mění a po jednom úplném cyklu se vždy vrací do původního stavu. Podle 1. věty termodynamické

$$dQ = dU + dW \tag{418}$$

a protože vnitřní energie je funkcí stavových veličin, bude její celková změna při cyklickém procesu nulová. Práce W vykonaná při jednom cyklu cyklického procesu bude tedy integrálem změn pohlceného tepla

$$W = \oint dQ \tag{419}$$

a k pulsacím bude opakovaně docházet tehdy, bude-li celková práce na úkor pohlceného tepla kladná, tedy $W > 0$.

Protože entropie má úplný diferenciál, bude ovšem

$$\oint dS = \oint \frac{dQ}{T} = 0, \tag{420}$$

takže část pohlceného tepla se v procesu opět uvolní.

Předpokládejme, že teplota jako funkce času t prodělává malou cyklickou změnu $\delta T(t)$ kolem střední hodnoty T_0, tedy

$$T(t) = T_0 + \delta T(t). \tag{421}$$

Pak lze místo (420) psát

$$\oint \frac{dQ(t)}{T_0 + \delta T(t)} = \oint \frac{dQ(t)}{T_0} \frac{1}{1 + \delta T(t)/T_0}. \tag{422}$$

S použitím rozvoje a zanedbáním členů vyšších řádů můžeme tuto rovnici ještě přepsat do tvaru

$$\oint \frac{dQ(t)}{T_0}(1 - \frac{\delta T(t)}{T_0}) \tag{423}$$

a tedy

$$\frac{1}{T_0} \oint dQ(t) = \oint \frac{dQ(t)\delta T(t)}{T_0^2}. \tag{424}$$

Podmínku udržení pulsací můžeme pomocí toho zapsat ve tvaru

$$W = \oint dQ(t) = \oint \frac{\delta T(t) dQ(t)}{T_0} > 0. \tag{425}$$

Protože T_0 je kladné číslo, znamená podmínka (426), že k pohlcování tepla ($dQ > 0$) musí docházet v té části cyklu, kdy teplota prochází maximem ($\delta T > 0$) a naopak. Jinak řečeno: aby hvězda pulsovala, musí k pohlcování tepla docházet při jejím smršťování a k jeho uvolňování naopak při expanzi.

Všimněme si ještě, že podmínku pulsační nestability jsme formulovali pro malý element hmoty. Analogická podmínka pro celou hvězdu by měla tvar

$$W = \int_M \oint \frac{\delta T(t)}{T_0} dQ(M) dM > 0, \tag{426}$$

kde kruhová integrace probíhá pro každý element hvězdné hmoty a integrace ve hmotě přes celou hvězdu.

Nejčastějším mechanismem, který může způsobit pulsační nestabilitu, je mechanismus opacitní, který ovšem funguje pouze v oblastech měnící se ionizace některého dostatečně zastoupeného iontu, nejčastěji vodíku či helia.

Uvažujme nejprve úplně ionizovaný plyn. Opacitu hvězdné látky lze obecně popsat pomocí funkční závislosti

$$\kappa = c\rho^k T^{-m}, \tag{427}$$

kde c je konstanta a k a m jsou kladná čísla. Poměrně dobrou aproximaci pro volně-vázané a volně-volné přechody představují Kramersovy opacity, které lze zapsat ve tvaru

$$\kappa = c\rho T^{-3,5}. \tag{428}$$

Pro adiabatický děj je $P \sim \rho^{\frac{5}{3}}$ a tedy $T \sim \rho^{\frac{2}{3}}$, což vede na

$$\kappa = c\rho^{-\frac{4}{3}}. \tag{429}$$

To ovšem znamená, že při kompresi s rostoucí hustotou klesá opacita a tedy pohlcování tepla. Jinými slovy, plně ionizované části hvězdy jsou stabilní a ke stabilním pulsacím v nich nemůže docházet.

Jiná je ovšem situace v oblastech měnící se ionizace, kde je energie stlačování spotřebována na růst ionizace a teplota roste mnohem pomaleji. Pokud budeme předpokládat závislost teploty na hustotě ve tvaru $T \sim \rho^{\lambda}$, pak pro Kramerovu opacitu platí

$$\kappa = c\rho^{1-3,5\lambda} \tag{430}$$

a podmínkou vzniku pulsací je tedy nerovnost

$$1 - 3,5\lambda > 0. \tag{431}$$

To bývá v oblastech měnící se ionizace často splněno. Záleží ovšem na tom, kde se ta která ionizační zóna ve hvězdě nachází. Je-li příliš hluboko uvnitř hvězdy, dojde disipací k utlumení kmitů, zatímco je-li příliš blízko povrchu, je tepelná kapacita příliš malá na to, aby došlo ke globálním oscilacím.

Pulsace můžeme v prvním přiblížení chápat jako akustické hustotní kmity s vlnovou délkou rovnou průměru hvězdy. Taková vlna se šíří rychlostí zvuku v_z a perioda radiální pulsace je tak dána výrazem

$$\Pi = \frac{2R}{v_z}. \tag{432}$$

Zvukové kmity lze považovat za adiabatické a z teorie akustických kmitů plyne pro rychlost zvuku

Eddington ukázal, že pro polytropní modely radiálně pulsujících hvězd platí mezi periodou pulsace Π a střední hustotou hvězdy $\bar{\rho}$

vztah

$$\Pi\sqrt{\bar{\rho}} = \sqrt{\frac{3}{\pi G}}. \tag{433}$$

Pokud budeme udávat pulsační periodu ve dnech a střední hustotu hvězdy v jednotkách střední sluneční hustoty, pak s použitím slunečních hodnot a hodnoty gravitační konstanty z rovnic (293, 297) a (298) dostáváme

$$\bar{\rho}_{\odot} = 1408,977\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \tag{434}$$

a

$$\Pi\sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{\odot}}} = 0,03688\ \mathrm{d}. \tag{435}$$

Konstanta na pravé straně tedy udává periodu radiální pulsace našeho Slunce, pokud by bylo pulsačně nestabilní. Např. pro chladného veleobra spektrální třídy M0Ia s hmotností a poloměrem, jaký jsme uvažovali v tabulce (2), dostaneme podle (435) $\Pi = 103\overset{\mathrm{d}}{,}7$. Naopak pro bílého trpaslíka Sirius B o hmotnosti 1,034 $\mathrm{m}_{\odot}$ a poloměru 0,0084 $\mathrm{R}_{\odot}$ vychází pulsační perioda pouhé 2,4 sekundy.
Vzhledem k tomu, že střední hustota $\rho = M/V$, kde M a V jsou hmotnost a objem hvězdy, je možné pro sférické modely psát

$$Q = \Pi\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{-\frac{3}{2}} = \Pi\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{T_{\mathrm{eff}}}{T_{\mathrm{eff}_{\odot}}}\right)^{3}, \tag{436}$$

přičemž konstantě Q (různé od konstanty v rovnici (433)) se říká *pulsační konstanta*.

Pro reálné hvězdné modely ovšem Q není konstanta, ale ukazuje se, že

$$Q \sim \left(\frac{R}{M}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{437}$$

Vemury a Stothers (1978) z toho s použitím Carsonových opacit odvodili následující vztah pro periodu radiální pulsace nerotující hvězdy *ve dnech*

$$\Pi \doteq 0,025\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{\frac{7}{4}}\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-\frac{3}{4}}, \tag{438}$$

přičemž koeficient úměry 0,025 vykazuje rozptyl ±0,001.

Vztah (438) dává pěkné výsledky. Např. pro β Cep hvězdu Spiku (α Vir A) určili Herbison-Evans a spol. (1971) s pomocí intensitního interferometru hodnoty

$$M/M_{\odot} = 10,9 \pm 0,9, \quad R/R_{\odot} = 8,1 \pm 0,5,$$

což podle vztahu (438) dává teoretickou hodnotu pulsační periody $0\overset{\mathrm{d}}{,}162$. Přihlédneme-li k udaným chybám poloměru a hmotnosti, nachází se teoretická pulsační perioda v rozmezí $0\overset{\mathrm{d}}{,}1366$ až $0\overset{\mathrm{d}}{,}1920$. Skutečně pozorovaná pulsační perioda je $0\overset{\mathrm{d}}{,}174$.

Výše uvedené vztahy vysvětlují rovněž existenci empirického vztahu perioda-zářivý výkon pro cefeidy a jiné typy radiálně pulsujících hvězd. Vztah (436) můžeme psát v logaritmickém tvaru

$$\log \Pi = \log Q - 0,5 \log(M/M_{\odot}) + 1,5 \log(R/R_{\odot}). \qquad (439)$$

Z definice efektivní teploty plyne

$$\log(R/R_{\odot}) = 8,474 - 0,2 M_{\mathrm{bol}} - 2 \log T_{\mathrm{eff}}, \qquad (440)$$

takže po dosazení do (439) dostaneme

$$\log \Pi = 12,71 + \log Q - 0,5 \log(M/M_{\odot}) - 3 \log T_{\mathrm{eff}} - 0,3 M_{\mathrm{bol}} (441)$$

Empirické závislosti zářivý výkon – perioda bývají často udávány ve tvaru

$$M_{\mathrm{V}} = a \log \Pi + b, \qquad (442)$$

kde koeficienty a a b jsou empiricky určeny pro danou skupinu pulsujících hvězd.

Rovnici (441) můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{V}} &= 42,37 + 3,333 \log Q - BC(T_{\mathrm{eff}}) - 3,333 \log \Pi - \\ &\quad -10 \log T_{\mathrm{eff}} - 1,667 \log(M/M_{\odot}) \qquad (443) \end{aligned}$$

Pulsační nestabilita obvykle odpovídá dosti úzkému rozmezí efektivních teplot a tak pouze člen odpovídající hmotnosti hvězdy má vliv na empirické koeficienty a a b, neboť pro danou skupinu hvězd existuje obvykle vztah mezi hmotností a zářivým výkonem ve tvaru

$$\log(M/M_{\odot}) = c\, M_{\mathrm{bol}} + d. \qquad (444)$$

Konkrétně pro klasické cefeidy se udává hodnota $b = -2,54$. Petersen a Christensen-Dalsgaard (1999) udávají pro δ Sct hvězdy na základě nové kalibrace pomocí družice Hipparcos hodnoty b v rozmezí -3.2 až -4.0.

V některých empirických závislostech se vliv efektivní teploty bere v potaz pomocí členu, který charakterizuje barvu hvězdy některým fotometrickým indexem. To jsou pak vztahy zářivý výkon – barva – perioda, nejčastěji ve tvaru

$$M_{\mathrm{V}} = a \log \Pi + b(b - y) + c, \tag{445}$$

kde koeficienty a, b a c jsou opět empiricky určeny pro danou skupinu pulsujících hvězd.

Je ovšem dobře si uvědomit (viz např. Harmanec 1987), že pokud si v logaritmickém tvaru vyjádříme dolní mez rotační periody nějaké hvězdy (což je také dolní mezí oběžné periody dvojhvězdy tvořené námi uvažovanou hvězdou a sekundárem zanedbatelné hmotnosti) t.j. Keplerovu rotační rychlost na uvažovaném rovníkovém poloměru (aproximace pomocí Rocheova modelu), dostaneme rovnici

$$\log \Pi = -0,936 - 0,5 \log(M/M_{\odot}) + 1,5 \log(R/R_{\odot}). \tag{446}$$

což je rovnice formálně totožná s rovnicí (439) pro log $Q = -0,936$. Všimněme si, že pro jednoduchý polytropní model Eddingtonův je log $Q = -1,433$. Vidíme tak, že časové škály radiální pulsace a rotace hvězd jsou srovnatelné a v konkrétních případech nemusí být snadné rozhodnout, co je skutečnou fyzikální příčinou pozorovaných změn jasnosti či radiální rychlosti hvězdy.

13 Typy pozorovaných hvězd a jejich vývojová stadia

13.1 Horké hvězdy spektrálního typu O a Wolfovy Rayetovy hvězdy

Fenomenologicky jsou hvězdy spektrálního typu O definovány přítomností ionizovaného helia He II v jejich čárových spektrech. To odpovídá efektivním teplotám zhruba nad 30 000 K. Pro objekty na hlavní posloupnosti se podle měření dobře pozorovaných dvojhvězd jedná o rozsah hmotností od 15 do více než 50 $m_\odot$, poloměrů od 6 do více než 10 $R_\odot$ a efektivních teplot nad 30000 K.

Většina pozorovaných O hvězd se nachází v blízkosti galaktické roviny, patří k první populaci a jedná se zřejmě o mladé hvězdy. Řada hvězd spektrálního typu O se však nachází i ve sférické složce Galaxie. Mají rozložení energie podobné normálním mladým O hvězdám, jejich jasnost je však mnohem menší a jsou označovány jako podtrpaslíci spektrálního typu O, t.j. O VI hvězdy. Tyto objekty jsou zřejmě málo hmotné a musí se svým vývojovým stadiem zásadně lišit od normálních O hvězd. Zarážejícím faktem je, že atmosféry těchto hvězd se svými spektrálními projevy velmi podobají atmosférám normálních O hvězd. Hvězdy typu O byly dále klasifikovány do podtříd O3 až O9.5 podle klesajícího stupně ionizace absorpčních čar pozorovaných v jejich spektrech. Ve spektrech mnoha O hvězd jsou pozorovány emisní čáry helia He II 4686 a též dusíku N III 4634, 4640 a 4641. Tyto hvězdy bývají označovány jako Of hvězdy. U některých Of hvězd se pozoruje i emise C III 5696 a též Hαemise. Frost a Conti (1976) zavedli klasifikaci Oe pro O hvězdy s Hαemisí, upozornili na to, že tato emise bývá časově proměnná podobně jako pro chladnější hvězdy spektrálního typu Be (viz dále) a vyslovili názor, že Oe hvězdy se zásadně liší od Of hvězd, pro něž u emisních čar podle nich nedochází k časovým změnám. To ale nemusí být pravda, jak ukazuje např. nedávná studie hvězdy V1007 Sco. Conti (1974) udělal přehlídku osamocených O hvězd a Thallerová (Thaller 1997) publikovala podobnou přehlídku O hvězd ve dvojhvězdách. Oba zjistili, že Hαemise se prakticky nevyskytuje u hvězd hlavní posloupnosti, ale pouze pro hvězdy obří a veleobří.

Pro některé O hvězdy v pásu hlavní posloupnosti byly také pozorovány rychlé změny profilů absopčních čar, které byly interpretovány jako projev atmosferických pulsací. Podle rovnice (438) lze pulsační periodu horkého O veleobra o hmotnosti 50 $m_\odot$ a poloměru 20 $R_\odot$ odhadnout na pouhých 0,25 dne. Baade objevil změny profilů čar O4If hvězdy ζ Pup s pravděpodobnou periodou $0\overset{\mathrm{d}}{,}356$, kterou interpretoval jako projev neradiální pulsace. Lze odhadnout, že pravděpodobná rotační perioda ζ Pup musí být delší než 4 dny, tedy podstatně delší, než zjištěná perioda změn profilů čar. Není ale dosud znám mechanismus, který by v této části HR diagramu vedl k pulsační nestabilitě.

Konečně Wolfovy-Rayetovy hvězdy (dále WR hvězdy) jsou definovány přítomnosti velmi silných a širokých emisních čar ve spektru, které svým rozložením energie odpovídá spektru hvězdy spektrálního typu O. Název těchto hvězd je odvozen od jmen dvou astronomů, kteří jako první pomocí visuálního spektroskopu podobné spektrum pozorovali při přehlídce hvězd v souhvězdí Labutě (viz Wolf a Rayet 1867). Čárové spektrum WR hvězd je patrně čistě emisní. Pro WR hvězdy se používá rovněž podrobnější spektrální klasifikace na podtřídy, přičemž se podtřídy definují opět sestupně podle přítomnosti emisních čar s klesajícím stupněm ionizace pozorovaných v optickém spektru. Navíc se WR hvězdy rozpadají do dvou paralelních skupin: První jsou označovány WC hvězdy a jsou pro ně charakteristické silné emisní čáry iontů uhlíku C a kyslíku O. Druhou skupinu tvoří WN hvězdy, v jejichž čarových spektrech dominují emisní čáry iontů dusíku N. Obě skupiny mají silné emisní čáry helia He II. Neexistuje žádné kriterium luminositní třídy a v zásadě není vůbec jasné, zda takto zavedené spektrální klasifikaci lze přiřadit monotonně se měnící efektivní teplotu. Dosud byly zavedeny spektrální podtřídy WC5 až WC9 a WN2 až WN9. Bylo ovšem zjištěno, že WR hvězdy se podobně jako O hvězdy nacházejí v diskové složce Galaxie, hlavně ve spirálních ramenech. Odhady jejich základních fyzikálních vlastností naznačují rozsah efektivních teplot mezi 30000 a 90000 K a hmotností mezi 10 a 40 $m_\odot$.

Normální O hvězdy jsou zřejmě hvězdami vyvíjejícími se od hlavní posloupnosti nulového věku, jejichž vývoj je však ovlivněn i ztrátou hmoty ve formě hvězdného větru.

O vývojové stadium WR hvězd se dosud vedou určité spory. Mohou to být objekty ve stadiu hoření helia v jádru, soudí se, že atmosféry WN hvězd jsou obohaceny produkty hoření vodíku a WC hvězdy produkty hoření helia. Vzhledem k jejich menším hmotnostem a stejnému prostorovému rozložení se někteří badatelé domnívají, že WR hvězdy vznikají během vývoje z O hvězd. Roli v jejich vývoji zřejmě hraje velmi silný hvězdný vítr a snad i rotace a v některých případech i jejich podvojnost. Rozsáhlé obaly WR hvězd se někdy mohou v čase měnit, což dokazuje případ dvojhvězdy CV Ser, u níž došlo ke zmizení fotometrických zákrytů.

Pokud jde o podtrpaslíky O, jejich vývojové stadium je méně jasné, musí se ale zřejmě jednat o hvězdy v pozdním vývojovém stadiu po vypálení vodíku a patrně v období hoření helia ve slupce. Zdá se, že v HR diagramu se kupí kolem vertikální linie u efektivní teploty asi 40000 K, od hlavní posloupnosti až k bílým trpaslíkům. Podle hrubých odhadů jsou hmotnosti O podtrpaslíků menší než hmotnost Slunce. V jediném případě, kdy byl pozorován O podtrpaslík ve dvojhvězdě spolu s hvězdou spektrálního typu G, existuje odhad jeho hmotnosti na 0,55 $m_\odot$.

13.2 Hvězdy spektrálního typu B

Hvězdy spektrálního typu B se vyznačují optickými spektry, v nichž dominují silné čáry vodíku a neutrálního helia, chybí již čáry He II a jsou přítomny čáry lehčích ionizovaných prvků jako C II, O II, N II atd. Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 2,2 do 15 $m_\odot$, poloměrů od 2,1 do 6 $R_\odot$ a efektivních teplot od 9400 do 30000 K. Kromě normálních B hvězd se pozorují pulsující hvězdy, několik typů chemicky pekuliárních hvězd a též hvězdy se závojem, které se vyznačují přítomností emisních čar vodíku.

13.2.1 Chemicky pekuliární Bp hvězdy

Mezi B hvězdami a hvězdami spektrálního typu A (viz níže) se pozorují hvězdy se zřetelně anomálním zastoupením některých chemických prvků. Preston (1974) zavedl zkratku CP k označení chemicky pekuliárních hvězd horní části hlavní posloupnosti a rozlišil 4 základní typy:

CP1… Am hvězdy,
CP2… magnetické Bp a Ap hvězdy,
CP3… HgMn hvězdy,
CP4… B hvězdy se slabými čarami helia (He-weak stars).

Silná, zhruba dipólová magnetická pole se pozorují pro hvězdy spektrálních typů B1-B2 s anomálně *silnými* čarami helia (He-strong stars) a pro některé B3p-B7p hvězdy se slabými čarami helia a anomálně silnými čarami Si a Ti. Pro tyto objekty se pozorují periodické změny jasnosti, intensity spektrálních čar a intensity magnetického pole s periodou rovnou rotační periodě hvězdy. Osa magnetického dipólu není obecně totožná s osou rotace hvězdy a lze ji z pozorování určit. Některé Bp hvězdy se silnými čarami helia jsou současně hvězdami se závojem, neboť se u nich pozoruje Hαemise, která se rovněž mění periodicky s rotační periodou hvězdy. Jedna z těchto hvězd, V1046 Ori, je primární složkou dvojhvězdy s periodou $18\overset{\mathrm{d}}{,}6$ a s výrazně výstřednou dráhou. Existence silných makroskopických magnetických polí u některých B a A hvězd zůstává nevysvětlenou záhadou. Existují hvězdy velmi podobné ve všech základních fyzikálních parametrech, které v současnosti dovedeme určit, těmto magnetickým hvězdám, které žádné měřitelné magnetické pole nemají.

CP3 hvězdy s anomálně silnými čarami Hg a Mn se vyskytují u spektrálních podtříd B6-B9, zatímco nemagnetické B4-B5 s anomálně slabými čarami helia mají ve spektrech nadbytek P a Ga. Rovněž pro obě tyto skupiny lze pozorovat změny jasnosti s rotační periodou.

13.2.2 Pulsující β Cep hvězdy

β Cep hvězdy se vyznačují periodickými – a často multiperiodickými – změnami jasnosti a radiální rychlosti s periodami pod $0\overset{\mathrm{d}}{,}3$ (typické periody jsou mezi $0\overset{\mathrm{d}}{,}1$ a $0\overset{\mathrm{d}}{,}25$). Jsou to hvězdy spektrálních podtříd B0-B2 a luminositních tříd III-IV, tedy hvězdy, které se již vyvinuly podél hlavní posloupnosti. jejich pulsace se poměrně nedávno podařilo objasnit pomocí opacitního mechanismu, který souvisí s prvky skupiny železa a je účinný při teplotách kolem 2×10^5 K. Novější studie ukazují, že pro β Cep hvězdy neexistuje dobře definovaný vztah mezi periodou, barvou a zářivým výkonem, což patrně souvisí s tím, že pulsace mnohých β Cep hvězd nejsou radiální, ale neradiální. Dziembowski a Pamyatnykh (1993) ukázali, že pulsační nestabilita typu β Cep nastává skutečně v té oblasti HR diagramu, kde se β Cep hvězdy nacházejí. Je třeba se zmínit, že samotný prototyp skupiny, hvězda β Cep je rovněž hvězdou se závojem, má magnetické pole, které se mění s rotační periodou hvězdy a je složkou dlouhoperiodické dvojhvězdy ve výstředné dráze, což m.j. vede ke zdánlivým změnám její pulsační periody.

13.2.3 Pomalu pulsující B hvězdy

Asi od počátku osmdesátých let dvacátého století byly objevovány malé periodické – a často také multiperiodické – světelné změny u hvězd středních spektrálních B podtypů kolem B5 s periodami delšími než β Cep hvězdy: asi od 1 do 3 dnů. Dziembowski a spol. (1993) teoreticky dokázali, že opacitní mechmismus, který způsobuje pulsační nestabilitu β Cep hvězd, vede rovněž k nestabilitě hvězd středních B podtypů s periodami od $0\overset{\mathrm{d}}{,}4$ do $3\overset{\mathrm{d}}{,}5$ a to se zdá existenci pomalu pulsujících teoreticky vysvětlovat. Věc ovšem může být ještě o něco komplikovanější, neboť nedávné studie ukázaly, že mnoho pomalu pulsujících B hvězd je složkami spektroskopických dvojhvězd.

13.2.4 Hvězdy se závojem

Hvězdy se závojem (anglicky: Be stars) jsou hvězdy spektrálních typů O, B či A, v jejichž spektru byly alespoň někdy za dobu jejich spektroskopických pozorování zjištěny emise v čarách vodíku Balmerovy serie. První dvě byly objeveny již při prvních pozorováních visuálním spektroskopem roku 1867. Jejich charakteristickou vlastností je velká časová proměnnost na nejrůznějších časových škálách. V současné době lze pokládat za dobře prokázané, že emisní čáry v jejich spektrech vznikají v rozsáhlých obálkách – závojích – které je obklopují a které zřejmě nepravidelně mizí a po čase se obnovují. Jde o plynné obaly, jejichž rozměry alespoň o řád převyšují rozměry samotných hvězd. Příčina vzniku závojů a některé typy zjištěné proměnnosti hvězd se závojem zůstavají i po půldruhém století jejich studia záhadou.

Co je o hvězdách se závojem v současnosti známo? Samotné hvězdy se v naprosté většině případů vyznačují velkými rotačními rychlostmi a statisticky vzato se lze domnívat, že rychle rotují všechny, t.j. že ty, pro než pozorujeme nízkou hodnotu promítnuté rotační rychlosti $v \sin i$, vidíme zhruba od pólu jejich rotace.

Jsou známy následující typy jejich časové proměnnosti:

1. *Dlouhodobé spektrální změny a změny jasnosti* Dlouhodobé spektrální změny hvězd se závojem jsou velmi nápadným jevem, který od počátku přitahoval pozornost mnoha pozorovatelů. Na

časové škále let až desetiletí (horní hranice není známa vzhledem k tomu, že máme pozorování jen za 130 let) se ve spektrech objevují a mizí emisní čáry. V obdobích bez emisních čar se hvězdy podobají normálním O, B či A hvězdám. Naopak v době silných emisí se ve spektrech mohou objevit ještě dodatečné absorbční čáry, které jsou užší, než čáry fotosferické. Tyto čáry vznikají zřejmě dodatečnou absorbcí záření v těch částech závoje, které se promítají na disk samotné hvězdy. V anglické literatuře se jim proto říká "shell lines" t.j. čáry obálky. Pokud pozorujeme hvězdu spíše od jejího rovníku, jsou emisní čáry zpravidla dvojité, neboť obálky, ve kterých vznikají, rotují, a my pozorujeme zachycené a znovu vyzářené záření jak z části obálky, která se k nám přibližuje, tak z té, která se od nás vzdaluje. Intenzity do fialova a do červena posunutých dvojitých vrcholku emisních čar se obvykle označují V a R a v obdobích, kdy je emise přítomna, lze někdy pozorovat cyklické změny poměru jejich intenzit, zvané V/R změny, které se odehrávají v cyklech nestejné délky, dlouhých několik let. Pokud měříme i radiální rychlost celé emisní čáry na jejích křídlech, zjistíme, že se mění souběžně s cyklickou V/R změnou, a to s amplitudou několika desítek $\mathrm{km\,s^{-1}}$. Současně se spektrálními změnami dochází i ke změnám jasnosti a barvy objektu, přičemž lze rozlišit dva možné případy: (a) Postupné objevování se emisních čar ve spektru a vznik nového závoje jsou doprovázeny zjasněním objektu a pohybem od hlavní posloupnosti k veleobrům v barevném diagramu $U-B$ vs. $B-V$. V tom případě hovoříme u positivní korelaci. (b) Vznik závoje je doprovázen poklesem jasnosti objektu a jeho pobybem podél hlavní posloupnosti ke chladnější spektrální podtřídě v $U-B$ vs. $B-V$ diagramu. To je inverzní korelace. Pokud jsou pro danou hvězdu k dispozici údaje z více období vzniku a zániku závoje, je známo, že nastává vždy stejný typ korelace. to podporuje domněnku o tom, že výskyt dvou typů korelací je geometrickým efektem: inverzní korelace nastává tehdy, pozorujeme-li danou hvězdu zhruba od rovníku. Vznikající chladnější obálka v tom případě hvězdu zčásti stíní a činí ji zdánlivě chladnější. Pokud hvězdu vidíme více od pólu, simulují vnitřní opticky tlusté části vznikající obálky zdánlivé narůstaní poloměru hvězdy.

2. *Střednědobé spektrální změny a změny jasnosti* Střednědobé změny se obvykle odehrávají na škále týdnů a měsíců. V některých případech jde o změny, které jsou jakousi miniaturní obdobou změn dlouhodobých, které mohou mít i stejnou příčinu - dočasný vznik slabé obálky. Často se však pozorují *periodické* změny radiální rychlosti, poměru V/R, intenzity spektrálních čar i jasnosti. Ty obvykle souvisejí s dvojhvězdností dané hvězdy se závojem.

3. *Rychlé spektrální změny a změny jasnosti* Rychlé změny se odehrávají na škále od několika málo desetin dne do asi 2-3 dnů, mají zpravidla velmi malé amplitudy a jsou intenzivně studovány teprve od konce sedmdesátých let 20. století. Jedná se jednak o změny profilů spektrálních čar ve formě měnící se asymetrie a také ve formě putujících vlnek, pohybujících se od fialového k červenému křídlu čáry. Změny jasnosti mají amplitudy zpravidla menší než $0\overset{\mathrm{m}}{.}1$. Zdá se, že světelné změny jsou periodické, s periodami blízkými k rotačním periodám příslušných hvězd. Světelné křivky jsou nesinusové a jejich amplituda a tvar se dlouhodobě mění. Změny profilů jsou rovněž periodické nebo možná i multiperiodické. Významnou charakteristikou rychlých změn je to, že jsou pozorovatelné i v době, kdy je daná hvězda zcela bez emisních čar. O původu rychlých změn nepanuje dosud shoda. Část badatelů je vysvětluje jako projev neradiálních pulsací, jiní se domnívají, že jde o projev korotujících struktur v plynu nad fotosférou hvězdy.

Pokud jde o samotný vznik obálek, existuje celá řada hypotéz, které se je pokoušejí vysvětlit. Všechny se ale dosud setkávají s problémy a žádná z nich nebyla dosud universálně přijata. Uveďme si alespoň čtyři pracovní modely, které se v současnosti nejčastěji uvažují:

- *Model rotační nestability* Struve (1931) poukázal na existenci korelace mezi šířkou emisních čar a pozorovanou hodnotou v sin i a vyslovil domněnku, že obálky vznikají rotační nestabilitou na rovníku hvězd se závojem. Jeho hypotéza ale nevysvětluje dlouhodobou časovou proměnnost závojů. Kromě toho se zdá, že hvězdy se závojem dosahují jen asi 70 % kritické rotační rychlosti - viz Porter (1996).

- *Dvojhvězdný model* Kříž a Harmanec (1975) přišli s domněnkou, že závoje jsou ve skutečnosti akrečními disky a vznikají přítokem plynu z druhé složky ve dvojhvězdách. Jejich hypotéza vysvětluje přirozeným způsobem vysoké rotační rychlosti hvězd se závojem jako důsledek přenosu úhlového momentu dopadající hmoty, dále střednědobé změny a může vysvětlit i změny dlouhodobé. Podvojnost mnoha hvězd se závojem se ale nepodařilo prokázat a u některých dobře studovaných objektů lze dokonce přítomnost sekundáru, který by zaplňoval Rocheovu mez, zcela vyloučit.

- *Hypotéza rotací stlačovaného hvězdného větru* Bjorkman a Cassinelli (1993) přišli s domněnkou, že závoje vznikají z hvězdného větru, který je u rychle rotujících hvězd podle jejich výpočtů stlačován do roviny rovníku. Podrobnější výpočty ale ukazují, že jejich mechamismus nedává dostatečně husté závoje, které by mohly vést ke vzniku pozorovaných emisních čar.

- *Pulsační hypotéza* Zastánci pulsačního modelu rychlých změn vyslovili domněnku, že k vyvrhování plynu by v rovníkových oblastech hvězd se závojem mohlo docházet ve chvílích, kdy se sejde ve fázi několik módů neradiálních pulsací, takže dodají kinetickou energii potřebnou k dosažení kritické rychlosti - viz např. Rivinius a spol. (1998). Jejich argument je založen na analýze dat hvězdy μ Cen pozorovatelné pouze z jižní oblohy. O to, zda jsou rychlé změny této hvězdy skutečně multiperiodické, se ale dosud vedou určité spory a jejich hypotézu je poněkud brzo hodnotit.

Vývojové stadium hvězd se závojem není vyjasněno. Zdá se dokonce, že celý jev není vázán na konkrétní vývojové stadium. Hvězdy se závojem se vyskytují jak mezi mladými hvězdami v blízkosti hlavní posloupnosti nulového věku, tak mezi vyvinutými obry a veleobry. To by do určité míry nasvědčovalo tomu, že mechanismus vzniku závojů je externí – jak to předpokládá např. dvojhvězdná hypotéza. Podle nedávných pozorování hvězd se závojem v různých hvězdokupách se však zdá, že existuje korelace mezi procentuálním zastoupením hvězd se závojem v kupě a obsahem těžkých prvků. Více hvězd se závojem se pozoruje v kupách s nízkým obsahem těžkých prvků. Maeder a Meynet (2001, práce v tisku) zjistili, že pro rotující modely s nízkým obsahem kovů se podmínky pro dosažení kritické rotace během vývoje zlepšují – na rozdíl od modelů spočítaných pro $Z = 0{,}02$. To by mohlo výšezmíněnou korelaci vysvětlovat a naznačovat, že závoje vznikají vyvrhováním materiálu hvězdy samotné.

13.3 Hvězdy spektrálních typů A a F

Hvězdy spektrálního typu A se vyznačují optickými spektry, v nichž dominují silné čáry vodíku, chybí již čáry helia a jsou přítomny čáry mnoha ionizovaných kovů (Fe II, Ti II, Cr II atd.). Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 1,5 do 2,2 $m_\odot$, poloměrů od 1,6 do 2,1 $R_\odot$ a efektivních teplot od 6950 do 9400 K.

Hvězdy spektrálního typu F se vyznačují optickými spektry, u nichž jsou čáry vodíku podstatně slabší, než u A hvězd, i když stále ve spektrech dominují. V jejich spektrech se pozoruje oproti A hvězdám také daleko více čar kovů. Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 1,15 do 1,5 $m_\odot$, poloměrů od 1,25 do 1,6 $R_\odot$ a efektivních teplot od 5900 do 6950 K.

Rozsah těchto parametrů pro hvězdy tříd A a F je tedy ve srovnání s teplejšími hvězdami B a O podstatně menší.

Mezi hvězdami typu A nalézáme kromě 'normálních' hvězd hlavní posloupnosti hvězdy výrazně chemicky pekuliární a také významné třídy pulsačně nestabilních hvězd, které mají přesah i do spektrálního typu F. Velmi dobrý přehled fenomenologicky zavedených tříd a jejich vzájemné souvislosti publikoval Kurtz (2000).

13.3.1 Am hvězdy (CP1 hvězdy)

Am hvězdy či metalické A hvězdy představují jednu z významných skupin chemicky pekuliárních hvězd. Jejich výskyt je omezen právě na spektrální typ A a jejich charakteristikou je, že zatímco čáry ionizovaného vapníku Ca II odpovídají rané spektrální podtřídě A zatímco ostatní čáry kovů odpovídají pozdní A podtřídě nebo dokonce spektrálnímu typu F a čáry vodíku odpovídají nějaké střední podtřídě mezi oběma extrémy. Barevné indexy Am hvězd v $(U-B)$ vs. $(B-V)$ diagramu odpovídají zhruba stejné podtřídě jako čáry vodíku a rovněž efektivní teplota Am hvězd odpovídá nejlépe jejich spektrálnímu typu podle H I čar. Am hvězdy tvoří skupinu pekuliárních hvězd, pro něž se nepozoruje přítomnost globálního magnetického pole. Při studiu vysokodispersních spekter bylo zjištěno, že "horkou Am" hvězdou je také Sirius A se spektrálním typem A0.

Někteří autoři zavedli rovněž popisný typ δ Del hvězdy k označení vývojově starších Am hvězd s luminositními třídami IV a III. Jiní badatelé upozornili na to, že tato třída je značně nehomogenní. Vyskytuje se rovněž označení ρ Pup hvězdy pro podobří a obří A5m až F5m hvězdy. U některých z těchto hvězd byly nalezeny změny jasnosti svědčící o pulsacích.

Conti (1970) shrnul vlastnosti Am hvězd a navrhl použít fyzikálnější definici. Podle něj se jedná o hvězdy chemicky pekuliární a to takové, které mají ve svých atmosférách buď nedostatek Ca (či také Sc) nebo přebytek prvků skupiny železa a těžších. Jedná se zásadně o objekty na hlavní posloupnosti a bylo rovněž zjištěno, že u nich nedochází k žádným fyzikálním změnám jasnosti. Zejména díky Abtovým systematickým studiím bylo rovněž zjištěno, že většina, a možná i všechny Am hvězdy jsou dvojhvězdami. Naopak všechny dvojhvězdy se složkami spektrálního typu A a s periodami pod $2\overset{\mathrm{d}}{.}5$ jsou Am hvězdami. Debernardi a spol. (2000) systematicky hledali spektroskopické dvojhvězdy mezi Am hvězdami ve hvězdokupách Hyády a Praesepe a publikovali pro celou řadu z nich dráhové elementy. Dvojhvězdy s oběžnými periodami pod $8\overset{\mathrm{d}}{.}5$ mají všechny kruhové dráhy. Je také zajímavé, že v HR diagramu leží všechny Am hvězdy z těchto hvězdokup v dobře definovaném pásu nad hlavní posloupností samotné hvězdokupy. Am hvězdy vesměs pomalu rotují, což může být v řadě případu způsobeno právě jejich podvojností.

Zatím nejslibnějším vysvětlením jejich vzniku se zdá teorie zářivé difuse publikovaná Michaudem (1970). Michaud ukázal, že v atmosférách hvězd s velmi stabilními atmosférami může během vývojově krátké doby (asi 10^4 až 10^6 let) dojít k diferenciální separaci chemických elementů. Ty ionty, jejichž zrychlení tlakem záření je větší než jejich váha v dané atmosféře, se udržují na povrchu hvězdy, zatímco jiné, např. helium, klesnou do nitra hvězdy. Obecně řečeno jsou gradientem tlaku záření nadlehčovány těžší prvky s velkým počtem spektrálních čar a naopak lehké a relativně hodně v atmosféře zastoupené prvky s malým počtem čar v atmosféře postupně klesají. Tomu, aby se zářivá difuse mohla uplatnit, může u Am hvězd napomoci jejich pomalá rotace a fakt, že u nich neexistují hluboké podpovrchové konvektivní zóny, tedy procesy, které v jiných případech vedou k systematickému promíchavaní chemických elementů. K vysvětlení pulsací ρ Pup hvězd se předpokládá, že během vývoje od hlavní posloupnosti nulového věku se i přes vliv zářivé difuse dostala postupně zóna ionizace He II do oblastí, kde znovu mohla vyvolat dostatečně účinně pulsační nestabilitu.

13.3.2 Ap hvězdy

Toto označení se používá pro hvězdy spektrálnímu typu A na hlavní posloupnosti, které mají neobvykle silné čáry některých kovů a zpravidla též měřitelné globální (často zhruba dipólové) magnetické pole o síle stovek až desetitisíc G. Jsou známy Ap SrCrEu hvězdy, které se vyskytují v rozsahu spektrálních typů od A3 do F0, a Ap Si hvězdy, pozorované mezi B8 a A2. Pro tyto hvězdy se obvykle pozorují periodické – ale obecně nesinusové – změny jasnosti, intensity magnetického pole a intensity čar kovů s periodou rovnou rotační periodě dané hvězdy. Metodami dopplerovské tomografie pro ně bylo zjištěno nerovnoměrné rozložení chemických elementů po povrchu hvězdy, a to ve vazbě na magnetické pole. Je zajímavé, že orientace magnetického dipólu je obecně jiná, než orientace rotační osy hvězdy. Modelováním změn s rotační periodou je možno zjišťovat základní fyzikální vlastnosti Ap hvězd. Jejich anomální chemické složení bývá nejčastěji opět vysvětlováno vlivem zářivé difuse při stabilizujícím účinku globálního magnetického pole. Hypotéza zářivé difuse vysvětluje i to, že Ap hvězdy nejsou zpravidla pulsačně nestabilní, helium totiž klesne hluboko do nitra hvězdy a opacitní mechanismus vzniku pulsací v zónách ionizace helia tak ztrácí svou účinnost.

Kurtz (1982) však přišel s objevem tak zvaných roAp hvězd, chladných Ap SrCrEu hvězd, které pulsují s velmi krátkými periodami mezi asi 6 až 15 minutami a s malými amplitudami světelných změn pod $0\overset{m}{,}016$. U některých z nich jsou tyto pulsace multiperiodické. Jde o neradiální pulsace vysokých harmonických módů podél osy magnetického pole. V důsledku toho jsou pozorované amplitudy pulsací modulovány s rotační periodou hvězdy. Tyto pulsace jsou pravděpodobně vybuzeny v zóně ionizace vodíku.

Nověji zavedenou skupinou chemicky pekuliárních hvězd jsou λ Boo hvězdy, které mají spektrální typ podle čar vodíku mezi A0 a F0, čára vápníku Ca II K odpovídá typu A0 nebo o něco pozdnějšímu, a čáry kovů, zejména Mg II 448,1 nm, jsou velmi slabé. Nízké zastoupení mají prvky skupiny železa, zatímco lehké elementy mají prakticky normální poměrné zastoupení. Detailní NLTE studie ukazují, že uhlík je zastoupen méně než kyslík a že existuje antikorelace mezi zastoupením uhlíku a kyslíku na jedné, a křemíku na druhé straně. To se zdá být ve shodě s teorií difuse obohacené o myšlenku akrece mezihvězdné látky. Na druhé straně bylo ale zjištěno, že mnoho λ Boo hvězd patří mezi pulsující δ Sct hvězdy – viz níže.

13.3.3 δ Scuti hvězdy

Jednotné označení pro skupinu pulsujících hvězd spektrálních typů A a F, které se nacházejí v pásu nestability v HR diagramu a mají pulsační periody kratší než $0\overset{d}{,}3$, zavedl Breger (1979), který ukázal, že rozlišování na různé dříve zavedené a popisně definované kategorie nemá fyzikální opodstatnění.[2] Vzhledem ke krátkosti period těchto hvězd a malé jasnosti většiny z nich nebylo snadné pro ně v éře fotografické spektroskopie pořídit spektra s dostatečným fázovým rozlišením a proto byla většina z nich objevena díky fotometricky nalezeným změnám jasnosti. Amplitudy změn jasnosti se pohybují v širokém rozmezí od prahu detekce (asi $0\overset{m}{,}01$) až po $0\overset{m}{,}8$ a někdy jsou v čase proměnné. Světelné křivky jsou buď zhruba sinusové nebo s více maximy. Pro mnohé δ Sct hvězdy byla nalezena multiperiodicita – pozorované změny jsou výslednicí více periodických změn s různými periodami. V případech, kdy se podařilo pozorovat

[2] V literatuře existovala v této oblasti dosti značná pestrost pojmosloví. Někteří autoři nazývali krátkoperiodické proměnné *trpasličími cefeidami*, jiní tento název užívali pouze pro proměnné s amplitudou změn větší než $0\overset{m}{,}3$. Jiní označovali proměnné s velkými amplitudami jako RRs hvězdy či hvězdy typu AI Vel. Objevilo se i označení ultrakrátkoperiodické proměnné, to ale vede k nedorozumění, neboť tak jsou označovány proměnné se sekundovými periodami změn. Původní označení trpasličí cefeidy se také nezdá vhodné, neboť jde v řadě případů o podobří či obří hvězdy.

i změny radiální rychlosti, existuje mezi maximem světelné křivky a minimem křivky radiální rychlosti fázový posun asi $0\overset{\mathrm{P}}{,}1$. typický poměr amplitud obou křivek činí 92 km s^{-1} mag^{-1}. δ Sct hvězdy na hlavní posloupnosti mají periody kolem 1 hodiny a amplitudy jejich světelných křivek jsou malé, $0\overset{\mathrm{m}}{,}02$ nebo menší. δ Sct hvězdy s větší svítivostí, podobři a obři, mají delší periody a často i větší amplitudy světelných změn. Je ovšem třeba říci, že pouze asi jedna třetina hvězd, které se nacházejí v dolní části pásu pulsační nestability v HR diagramu jsou δ Sct hvězdy. Detekce pulsací závisí i na rotační rychlosti a chemickém složení hvězd, přesto se zdá, že musí existovat ještě další faktory, které ovlivňují, zda daná hvězda bude pozorovatelným způsobem pulsačně nestabilní nebo ne, abychom pozorovaný poměr mezi pulsujícími a nepulsujícími hvězdy v pásu nestability mohli beze zbytku vysvětlit. Meze pásu nestability v efektivní teplotě jsou 7500-8800 K na hlavní posloupnosti nulového věku a 6950 K pro $M_V = 1\overset{\mathrm{m}}{,}7$ až 8400 K pro $M_V = 0\overset{\mathrm{m}}{,}65$.

Breger (1979) a Breger, Stockenhuber (1983) a nejnověji Rodríguez a Breger (2001) shromáždili údaje o jasnostech, pulsačních periodách a dalších fyzikálních vlastnostech δ Sct hvězd a příbuzných objektů. Nalezli m.j. dobře definovaný vztah zářivý výkon – barva – perioda ve tvaru

$$M_V = -3,052 \log P + 8,456(b-y) - 3,121. \tag{447}$$

S použitím podobného pozorovacího materiálu odvodili López de Coca a spol. (1990) empirický vztah pro periodu základního módu ve tvaru

$$\log P = -0,300 M_{\mathrm{bol}} - 3,195 \log T_{\mathrm{eff}} + 11,90. \tag{448}$$

Odhadneme-li pulsační periodu A5 hvězdy na hlavní posloupnosti podle základního vztahu (435), dostaneme hodnotu 1,62 hodiny, podle zpřesněného vztahu (438) vyjde 1,10 hodiny, opět ve velmi dobré shodě s pozorováním.

Breger (1983) došel rovněž k závěru, že ve statistickém smyslu existuje dobrá shoda mezi pozorováními δ Sct hvězd ve hvězdokupách o známém vývojovém stáří a jejich průměrnými periodami. Jak totiž plyne z rovnic (435) či (438), je pulsační perioda přímo úměrná poloměru pulsující hvězdy. Protože během vývoje na hlavní posloupnosti poloměr hvězdy pozvolna roste, lze očekávat, že průměrné pulsační periody periody δ Sct hvězd v jednotlivých kupách budou tím delší, čím je hvězdokupa starší. To se statisticky skutečně pozoruje. Breger a Pamyatnykh (1998) se pokusili zjistit, zda lze nalézt shodu mezi předpovědí teorie hvězdného vývoje a pozorováním *sekulárních změn period* jednotlivých δ Sct hvězd. Zjistili, že pozorované změny period vykazují statisticky podobný počet pozvolného narůstaní a pozvolného poklesu pulsační periody, přičemž rychlost změny je asi o řád vyšší, než očekávaný sekulární růst periody v důsledku vývojových změn. Jinak řečeno, pozorované změny jsou důsledkem jiných procesů, které patrně nesouvisí s vývojem δ Sct hvězd a na podobný test vývojové teorie jsou stávající řady pozorování ještě příliš krátké.

Celkově můžeme říci, že δ Sct hvězdy lze při současných znalostech kvalitativně dobře vysvětlit jako objekty vyvíjející se od hlavní posloupnosti v dolní části pásu nestability, který souvisí s ionizačními zónami vodíku a helia. Jistou část z nich mohou tvořit i hvězdy, které teprve kontrahují k hlavní posloupnosti nulového věku. To však nemůže plně vysvětlit, proč se v příslušné části HR diagramu pozoruje kromě δ Sct hvězd také tak velký počet nepulsujících A a F hvězd. Konkrétně pro δ Sct hvězdy je podle nejnovějších studií pro vznik pulsací rozhodující zóna ionizace He II.

13.3.4 SX Phe hvězdy

Hvězdy typu SX Phe jsou patrně analogií δ Sct hvězd pro objekty Populace II, t.j. starší generace hvězd. Mají nižší obsah těžkých prvků, patří ke kulové složce Galaxie a vyznačují se velkými prostorovými rychlostmi. Jejich pulsační periody jsou krátké, ve většině případů kratší než $0\overset{d}{.}08$. Jejich vývojové stadium však v současnosti zůstává záhadou. Takto staré hvězdy s efektivními teplotami kolem 8500 K by totiž měly být už dávno vyvinuty mimo oblast hlavní posloupnosti v HR diagramu. Existují proto dohady, že může jít o objekty ve vývojovém stadiu pozdějším než stadium obrů nebo že se jedná o dvojhvězdy, které se slily v jednu hvězdu.

13.3.5 γ Dor hvězdy

γ Dor hvězdy jsou velmi nově objevenou skupinou hvězd. Jde o hvězdy spektrálního typu F, které vykazují změny jasnosti a radiálních rychlostí s periodami delšími, než δ Sct hvězdy: od $0\overset{\mathrm{d}}{,}3$ do $2\overset{\mathrm{d}}{,}0$, přičemž obě křivky jsou prakticky ve fázi. Amplituda světelných změn je zpravidla pouze několik málo setin hvězdné velikosti. γ Dor hvězdy se nacházejí zčásti na chladném konci dolní části pásu nestability, zčásti vně něj směrem k nižším efektivním teplotám. Spektrálně jde o hvězdy luminostiních tříd V-IV. Většina badatelů se nyní kloní k tomu, že se jedná o pulsující hvězdy, neboť u některých byly nalezeny multiperiodické změny, mechanismus vzniku pulsací však dosud nebyl objasněn.

13.3.6 Li a Be u F a G hvězd

Lithium a berylium jsou velmi citlivým indikátorem toho, jak hluboko směrem do cetra hvězdy zasahují podpovrchové konvektivní zóny u F a G hvězd. Slučovací reakce lithia probíhají již při teplotě asi $2,5 \times 10^6$ K, berylia při asi $3,5 \times 10^6$ K. Pokud tedy konvektivní zóna dosahuje až do hloubek, kde jsou ve hvězdě potřebně vysoké teploty, bude obsah Li a Be v atmosférách takových hvězd značně nízký. K analýze ve spektrech se nejčastěji užívají resonanční dvojice čar Li I 670,776 a 670,791 nm a Be II 313,042 a 313,107 nm. V atmosféře Slunce je poměrný obsah Li nízký, Li/H $= 10^{-11}$, zatímco typické maximum pro hvězdy populace I je Li/H $= 10^{-9}$. Poměrný obsah berylia je nízký shodně pro Slunce i hvězdy populace I: Be/H $\sim 10^{-11}$.

Studium obsahu lithia ve hvězdokupách ukazuje některé zajímavé souvislosti. Pro celou řadu hvězdokup byla nalezena zřetelná závislost obsahu lithia na efektivní teplotě, pro hvězdy kolem F5 je patrný silný pokles s minimem u efektivní teploty asi 6700 K, poté růst k nižším teplotám s maximem kolem 6300 K a poté opět plynulý pokles směrem ke chladnějším hvězdám. Lokální minimum kolem 6700 K se však nevyskytuje u mladých hvězdokup jako jsou Plejády či α Per a zdá se tak, že k dramatickému poklesu v obsahu lithia v atmosférách F hvězd kolem podtřídy F5 dochází mezi vývojovým věkem 5×10^7 a 5×10^8 let. Celá věc je ale zřejmě složitější, neboť asi pro polovinu F hvězd, které se nenacházejí ve hvězdokupách, je obsah lithia Li/H $= 10^{-9}$ a k žádnému poklesu u nich nedochází, ačkoliv jejich vývojový věk se odhaduje asi na $1 - 2 \times 10^9$ let. To znamená, že na rozsah konvektivní zóny musí mít vliv ještě jiné faktory, než jen vývojový věk. Pro Hyády existuje náznak souvislosti mezi vyčerpáním lithia a rotační rychlostí příslušných F hvězd. Michaud se snažil objasnit nedostatek lithia kolem spektrálního typu F5 teorií zářivé difuse. Jeho výpočty skutečně ukazují, že u těchto hvězd může docházet ke klesání lithia směrem do nitra hvězdy, ale celý proces probíhá příliš pomalu, než aby se mohl projevit už v Hyádách. Existují též úvahy o možné roli malé ztráty hmoty z atmosfér F hvězd a o roli meridionální cirkulace.

Studium berylia u stejných F hvězd v Hyádách ukázalo shodný a normální obsah berylia, z čehož lze vyvodit, že dolní hranice konvektivních zón u těchto hvězd zasahuje do oblastí s teplotami nad $2,5 \times 10^6$ K, ale nedosahují až k teplotám $3,5 \times 10^6$ K.

13.4 G, K a M hvězdy

Společným znakem chladných hvězd spektrálních typů G, K a M je existence hlubokých podpovrchových konvektivních zón, které vedou m.j. ke vzniku chromosfér a korón. Rozsah základních charakteristik pro hvězdy hlavní posloupnosti je následující:

G hvězdy:
$M = 0{,}91 - 1{,}16\ \mathrm{m}_\odot$, $R = 1{,}01 - 1{,}25\ \mathrm{R}_\odot$, $T_{\mathrm{eff}} = 5200 - 5900$ K;

K hvězdy:
$M = 0{,}45 - 0{,}91\ \mathrm{m}_\odot$, $R = 0{,}52 - 1{,}01\ \mathrm{R}_\odot$, $T_{\mathrm{eff}} = 3900 - 5200$ K;

M hvězdy:
$M = 0{,}10 - 0{,}45\ \mathrm{m}_\odot$, $R = 0{,}12 - 0{,}52\ \mathrm{R}_\odot$, $T_{\mathrm{eff}} = 2600 - 3900$ K.

13.4.1 Projevy a časová proměnnost hvězdných chromosfér

Chromosféra byla objevena nejprve u Slunce a později na základě různých typů pozorování i u chladných hvězd. Jedná se o poměrně řídkou – a alespoň v případě Slunce i nepříliš rozsáhlou – vrstvu, která se vyznačuje vyšší teplotou, než je teplota pod ní ležící fotosféry. Tloušťka sluneční chromosféry činí asi 10^4 km. Vzhledem k vyšší teplotě se chromosféra projevuje podobně jako rozsáhlé plynové závoje horkých hvězd: přítomností emisních čar ve spektru. Nad chromosférou se nachází ještě mnohem řidší a geometricky rozsáhlejší koróna, která plynule přechází do prostoru. Záření koróny je nepatrné proti záření slunečního disku a proto lze korónu přímo pozorovat buď při úplných slunečních zatměních nebo z kosmického prostoru. V části sluneční koróny se pozorují emisní čáry železa a dalších prvků ve velmi vysokých stupních ionizace, což svědčí o tom, že ionizační teplota v koróně dosahuje teploty až 10^6 K. Existence teplotní inverze s rostoucí vzdáleností od středu hvězdy se vysvětluje dynamickým zahříváním v důsledku mohutných konvektivních pohybů. Konvektivní proudy vyvolávají rázové zvukové vlny, jejichž kinetická energie je úměrná hustotě a čtverci rychlosti. Hustota se vzdáleností klesá, rychlost roste a do chromosféry a koróny se tak dostává velké množství kinetické energie, z níž se jen nepatrná část vyzáří a většina se použije na silné zvýšení teploty.

Experimentální důkazy existence chromosfér a korón lze podle rostoucí vzdálenosti od středu hvězdy srhnout takto:

Na I D čáry 588,9 a 589,5 nm: V této dvojici absorbčních čar lze ve slunečním spektru pozorovat rychlostní strukturu spodní části chromosféry. Také u některých jasných veleobrů třídy G a K se pozorují dodatečné, do fialova posunuté absorbce u této dvojice sodíkových čar, svědčící o jejich okolohvězdném původu.

Trojice Ca II čar v infračervené oblasti u 849,8, 854,2 a 866,2 nm: V této trojici absorbčních čar se u hvězd s chromosférami pozorují asymetrie či slabé zaplnění jader čar emisí. Radiální rychlost se liší od radiální rychlosti fotosferických čar. (Pro zajímavost: tato trojice čar se pozoruje v emisi pro řadu silně interagujících dvojhvězd, jejichž primáry jsou hvězdy se závojem.)

Čáry vodíku Balmerovy serie: U chladných hvězd s chromosférami se pororují nečekaně silné a široké čáry vodíku, odpovídající vyšší teplotě než je efektivní teplota příslušných hvězd. Kromě toho je např. u M1Ia hvězdy α Ori Hαprofil posunut vůči fotosféře do fialova. U veleobrů třídy K a zvláště jasných veleobrů tříd F a G se pozoruje i do fialova posunutá a časově proměnná Hαemise. U obřích hvězd populace II se pozorují asymetrické dvojité Hαemise.

Emisní jádra čar Ca II K a H u 393,3 a 396,8 nm: Čáry ionizovaného vápníku jsou u chladných hvězd silné a široké a v jejich jádru lze i na fotografických spektrech pozorovat emisní složku, zpravidla u hvězd, které se v HR diagramu nacházejí vpravo od pásu nestability cefeid. Pozorují se u hvězd spektrálního typu F a chladnějších.

Emisní jádra dvojic čar Mg II u 279,55 a 280,27 nm a u 279,08 a 279,80 nm: Čáry ionizovaného hořčíku v blízké ultrafialové oblasti mají obvykle vůči fotosféře lepší kontrast a emise v jejich jádrech jsou tak lépe patrné. Pozorují se prakticky pro všechny hvězdy hlavní posloupnosti chladnější než F2 a dokonce pro Altair se spektrem A7IV-V a pro všechny obry a veleobry vpravo od pásu nestability.

Emisní jádra čáry Lyα u 121,57 nm: Emisní profily vodíkové čáry Lyα byly poprvé pozorovány pomocí družice OAO3 – jde opět o centrální emisní jádro.

Emisní čáry O I, C II, C IV a Si IV v UV oboru: Emisní profily těchto čar se pozorují pro řadu chladných hvězd a svědčí o teplotách

10^4 až 2×10^5 K.

Měřitelné zářeni v rentgenovém oboru spektra: Rentgenové záření bylo družicí Einstein (HEAO-2) zjištěno pro hvězdy hlavní posloupnosti všech spektrálních typů a pro některé G a K obry. Naprosto se ale nedaří nalézt měřitelné rentgenové záření pro nejchladnější obry a veleobry v pravé horní části HR diagramu, pro G až M veleobry a obry chladnější než K2. Zdá se, že tyto hvězdy nemají horké koróny. Zároveň bylo ale zjištěno, že intensita záření v rentgenovém oboru není jednoznačně dána spektrálním typem a luminositní třídou dané hvězdy. Zdá se, že rentgenové záření souvisí s přítomnosti magnetických polí podobných slunečním. Vznik magnetických polí u Slunce a chladných hvězd se vysvětluje obvykle mechanismem dynama působícího v konvektivních zonách. Cirkulace může být přirozeně ovlivněna i rotací hvězd. Pozorování svědčící o zřetelné korelaci mezi intensitou rentgenového záření a rotační rychlostí hvězd v rozmezí spektrálních typů F7 až M5 se zdají tuto domněnku potvrzovat.

Pozorování hvězdným větrem rozšířených chromosfér u některých zákrytových dvojhvězd s chladnou veleobří složkou ukazují, že jde o geometricky rozsáhlé obálky o rozměrech několikrát převyšujících rozměry samotných hvězd.

Nejdelší pozorovací řady svědčící o časové proměnnosti hvězdných chromosfér existují celkem přirozeně pro Ca II K emise v jádře. Ukazuje se, že patrně všechny chromosféry jsou časově proměnné na časových škálách od minut až po staletí. Krátkodobé změny zvětšují zpravidla amplitudu změn s růstem intensity emisní čáry. Pro několik desítek hvězd spektrálních typů G2 a pozdějších byly pozorovány několikaleté cykly ve změnách intensity emise, připomínající jedenactiletý cyklus sluneční. Rychlé změny souvisejí v mnoha případech s rotací příslušných hvězd, což svědčí o přítomnosti skvrn. Dlouhé cykly podobné slunečním se zřejmě pozorují pouze u hvězd s rotačními periodami delšími než 20 dní.

Výskyt chromosférické aktivity lze posuzovat i podle typu hvězd, pro něž se pozoruje. Jedná se o následující třídy hvězd:

Hvězdy typu UV Ceti: Tyto hvězdy byly definovány jako skupina M3Ve až M6Ve hvězd, u kterých dochází k občasným prudkým zjasněním o 1 až 6 hvězdných velikostí, přičemž zjasnění nastane během několika sekund či nejvýše několika málo desítek sekund a celé zjasnění trvá 10 až 50 minut. Mnozí autoři však pojímali tuto definici volněji a zařazovali mezi typ UV Cet všechny chladné hvězdy, u nichž dochází k občasným eruptivním zjasněním připomínajícím sluneční erupce ve velkém. Fotometrická pozorování těchto hvězd mimo období zjasnění v některých případech prokázala přítomnost světelných změn s periodu rotace, tedy opět cosi připomínající hvězdné skvrny.

Hvězdy typu BY Dra: Tyto hvězdy byly definovány jako podskupina hvězd typu UV Cet (v obecnějším pojetí). Zařazují se mezi ně hvězdy hlavní posloupnosti spektrálních typů K a M s emisemi jak v čarách vodíku, tak v čarách Ca II a s periodickými světelnými změnami o malé amplitudě do $0\overset{m}{.}1$ a s periodami několik dní. Je známo asi 20 takových hvězd. Bopp a Fekel (1977) zjistili, že u zhruba poloviny všech známých BY Dra hvězd (včetně BY Dra samotné) lze prokázat, že se jedná o spektroskopické dvojhvězdy, ve většině případů s oběma složkami pozorovatelnými ve spektru. U většiny známých dvojhvězd je perioda rotace a oběhu synchronizována. BY Dra sama se pohybuje ve výstředné dráze a pozoruje se u ní t.zv. pseudosynchronizace vlivem větší přitažlivé síly v periastru.

Hvězdy typu RS CVn: Jedná se o dvojhvězdy s oběžnými periodami od 1 do 14 dnů se synchronizovanými periodami rotace a oběhu a s teplejšími složkami spektrálních typů F či G v blízkosti hlavní posloupnosti, u kterých se aspoň mimo zákryty pozorují silné emisní čáry Ca II a světelné změny s rotační periodou způsobené přítomností skvrn na jejich povrchu. V případě zákrytových dvojhvězd se tyto světelné změny sčítají se změnami v důsledku zákrytů a projevují se deformacemi zákrytových křivek. Dlouhodobá pozorování těchto hvězd prokázala, že skvrny postupně migrují jako u Slunce, takže fázování i sám vzhled světelných křivek se dlouhodobě mění. Jednou z nejvíce studovaných RS CVn hvězd je zákrytová dvojhvězda AR Lac, u které se chromosferická aktivita pozoruje pro obě složky dvojhvězdy, jejichž spektrální typy jsou K0IV a G2IV. existují i velmi detailní pozorování rentgenového záření z obou složek a model lokalizace korón u nich. Jinou hojně studovanou RS CVn hvězdou je V711 Tau, pro níž byly objeveny rychlé změny profilů čar, podobné putujícím vlnkám u horkých hvězd, a pro níž byla poprvé použita metoda dopplerovské inverze pozorovaných změn profilů čar (Doppler imaging). Pomocí ní lze nazávisle v různých obdobích sledovat migraci skvrn na povrchu podobných hvězd.

Těsné dvojhvězdy typu W UMa: Jedná se o dotykové dvojhvězdy s krátkými oběžnými periodami a se složkami obvykle podobných a pozdních spektrálních typů a se světelnými křivkami, které se mění plynule během celé oběžné periody.

Hvězdy typu FK Com: Jedná se o osamocené hvězdy spektrálních typů G – K s promítnutými rotačními rychlostmi kolem 100 $\mathrm{km\,s^{-1}}$, což je u tak chladných hvězd velice vysoká hodnota. Jejich hlavní charakteristikou je přítomnost emisních čar, často silnějších, než jaké se pozorují pro RS CVn dvojhvězdy. Pozorují se u nich rovněž světelné změny s amplitudou $0\overset{\mathrm{m}}{.}1$ – $0\overset{\mathrm{m}}{.}2$ a s periodami několik dnů, patrně opět jejich rotačními periodami. Nevykazují žádné změny radiální rychlosti. Změny jejich dvojitých Hα emisních profilů vykazují V/R změny s periodou světelných změn, čímž se podobají horkým hvězdám se závojem. Vzájemné fázování změn naznačuje, že fotometrické změny mohou souviset spíše s horkou, než s chladnou skvrnou. Při studiu vysokodispersních spekter byly u FK Com nalezeny malé změny radiální rychlosti Hα emise s periodou světelných změn a po jistou dobu byl proto zvažován model interagující dvojhvězdy s velmi rozdílnými složkami. Vývojové stadium zůstává záhadou, snad by mohlo jít o hvězdy, které vznikly postupným slitím dvojhvězdy typu W UMa v jediné těleso. To by vysvětlovalo velkou rotační rychlost.

Hvězdy typu T Tau: Jedná se o osamocené hvězdy spektrálních typů F5 – G5, u nichž se pozorují chromosferické emisní čáry (zejména Ca II) a rychlé a zcela nepravidelné změny jasnosti s amplitudami až $3\overset{\mathrm{m}}{.}0$. Mají nízký zářivý výkon a zpravidla se vyskytují uvnitř zářící či temné mlhoviny. Později se ukázalo, že v případech, kdy se u těchto hvězd pozoruje absorbční čárové spektrum, odpovídá zpravidla spektrálním typům mezi pozdním typem F a typem M, přičemž je ve spektru přítomna silná absorbční čára lithia 670,7 nm. Poměrně nedávno se podařilo prokázat, že mnohé T Tau hvězdy jsou složkami visuálních dvojhvězd s dlouhými oběžnými periodami.

Dnes se vetšina badatelů shoduje v názoru, že hvězdy T Tau jsou mladé hvězdy, které teprve kontrahují k hlavní posloupnosti nulového věku a dosud u nich probíhá i akrece hmoty z okolní mlhoviny. Tomu odpovídá i přítomnost silné čáry lithia. Jejich nepravidelné světelné změny se vysvětlují nehomogenitami v rozsáhlých obálkách, které je obklopují.

13.5 Hvězdy v pozdních vývojových stadiích

13.5.1 Bílí trpaslíci a ZZ Ceti hvězdy

Bílí trpaslíci se v dvouroměrné klasifikaci popisují luminositní třídou VII, mnohem častěji se však v astronomické literatuře objevuje označení DA, DB, DO a podobně, označující bílé trpaslíky se spektry spektrálních tříd A, B, O atd. Třída DA je charakterizována přítomností čar vodíku v atmosféře příslušných hvězd, u třídy DB jsou přítomny čáry neutrálního helia. Podrobnějším studiem se ukázalo, že DA a DB trpaslíci tvoří dvě odlišné skupiny objektů a dvě sekvence v HR diagramu. Relativní obsah helia v atmosférách DA trpaslíků je nepatrný (He/H $< 10^{-3}$). Naopak v atmosférách DB hvězd prakticky chybí vodík (He/H $> 10^{5}$). Byly nalezeny i některé přechodné případy DB hvězd, označované DBA, u nichž lze slabé čáry vodíku ve spektrech pozorovat (He/H $\sim$ 3-10$\times 10^{3}$). Bílí trpaslíci klasifikovaní DO jsou pokračováním sekvekce DB směrem k vyšším teplotám. Pomocí modelů atmosfér složených buď z čistého vodíku nebo helia byl odhadnut rozsah efektivních teplot DA trpaslíků v rozmezí od 7000 do 30000 K, pro DB hvězdy je to 12000 až 30000 K.

Rozložení prostorových rychlostí ukazuje, že naprostá většina bílých trpaslíků pochází ze starší populace II. Existence dvou sekvencí souvisí pravděpodobně s různou účinností zářivé difuse.

ZZ Cet hvězdy jsou bílí trpaslíci typu DA, u nichž dochází k měřitelným změnám jejich jasnosti. Změny jasnosti jsou zřejmě periodické a často multiperiodické, a velmi rychlé. Periody známých ZZ Cet hvězd jsou mezi 100 a 1200 sekundami, což je ale o hodně delší, než by odpovídalo jejich radiálním pulsacím, takže se dosti všeobecně soudí, že pozorované změny jasnosti jsou projevem pulsací neradiálních. Byla nalezena určitá korelace mezi amplitudou pozorovaných změn a složitosti světelných křivek. ZZ Cet hvězdy s malými amplitudami do $0\overset{\mathrm{m}}{,}05$ mají zpravidla periodické sinusové změny jasnosti, jejichž perioda je velmi stálá. V posledních desetiletích je pulsacím ZZ Cet hvězd věnovaná značná pozornost, neboť existuje oprávněná naděje, že se s jejich pomocí lze dosvědět hodně o skutečné vnitřní stavbě bílých trpaslíků, podobně jako v případě našeho Slunce. Soudí se, že možná všichni bílí trpaslíci typu DA se stávají pulsačně nestabilními, když se během svého vývoje a postupného chladnutí dostávají do oblasti s efektivní teplotou mezi 13000 a 11000 K.

13.5.2 Novy

Pokud je bílý trpaslík složkou dvojhvězdy a dojde k přenosu hmoty bohaté na vodík z druhé složky na povrch bílého trpaslíka, může docházet k velmi nápadným zjasněním soustavy. Na povrchu bílého trpaslíka může nastat velmi bouřlivé jaderné slučování vodíku na helium, což vede k výbuchu a odvržení obálky do okolního prostoru. Pohyb hmoty velkými rychlostmi se skutečně o nov po výbuchu pozoruje.

Známy jsou rovněž trpasličí novy, dvojhvězdy složené z bílého trpaslíka a červeného trpaslíka (normální hvězdy), jejichž oběžné periody činí jen několik hodin a u nichž dochází k opakovaným zjasněním o 3 až 5 hvězdných velikostí během týdnů až několika let. Soudí se, že i tyto objekty se zjasňují v důsledku přenosu hmoty mezi složkami, mechanismus ale patrně nesouvisí s nukleárním hořením, ale s nestabilitou akrečního disku kolem bílého trpaslíka, jehož opacita se v důsledku akrece po dosažení určité kritické hodnoty může velmi prudce změnit.

Zdá se jisté, že výbuchy nov vedou jen k relativně malé ztrátě hmoty ze soustavy poměřováno celkovou hmotností hvězd. U některých trpasličích nov s mnoha pozorovanými zjasněními byla nalezena korelace mezi mohutností zjasnění a dobou do následujícího zjasnění.

13.5.3 Supernovy

Supernovy představují jeden z nejnápadnějších jevů na obloze. Jedná se o hvězdy, které se během krátké doby zjasní o mnoho magnitud, takže pokud k takovému zjasnění dojde u objektů nepříliš vzdálených od sluneční soustavy, je možno po určitý čas pozorovat supernovu na obloze i ve dne. Následující pozvolný pokles jasnoti může trvat i dva roky. Supernovy bývají klasifikovány podle vzhledu spekter v maximu jasnosti do dvou základních typu. Supernovy typu I neobsahují ve spektrech čáry vodíku, supernovy typu II ano. Supernovy typu I bývají dále děleny podle přítomnosti či nepřítomnosti čar křemíku a helia ve spektrech. Typ II se dále dělí podle vzhledu světelné křivky. Spektra v maximu jasnosti jsou často téměř jen spojitá, bez spekrálních čar. Později se objevují emisní čáry vodíku a ještě později zakázané čáry kovů.

Pro supernovy typu I bylo zjištěno, že se vyskytují v kulových složkách galaxií a že nejsou vázány na spirální ramena. Protože hmotné hvězdy se vyskytují právě ve spirálních ramenech, svědčí to o tom, že supernovy typu I nejsou výsledkem vývoje osamocených hvězd, ale produktem dvojhvězdného vývoje. V současnosti se soudí, že tyto supernovy vznikají v důsledku akrece nadkritického množství hmoty na bílého trpaslíka složeného převážně z uhlíku a kyslíku, který je hmotu přijímající složkou ve dvojhvězdě.

O supernovách typu II se soudí, že jsou výsledkem dynamické nestability v závěřečných stádiích vývoje jednotlivé hvězdy. Při jejich výbuchu dojde k rozmetání většiny hvězdného materiálu do prostoru a zbude jen malé degenerované jádro, neutronová hvězda.

Nová přesnější pozorování postupně odhalují značnou individualitu supernov a lze se nadít toho, že i teoretické představy o jejich vzniku se budou ještě značně vyvíjet.

Obecná literatura, učebnice:

Reference

[1] de Loore C.W.H., Doom C. 1992 Structure and Evolution of of Single and Binary Stars, Astrophysics and Space Science Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 0-7923-1768-8 (HB)

[2] Kippenhahn R., Weigert A. 1990 Stellar Structure and Evolution, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-50211-4

[3] Kleczek J. 1957 Nitro hvězd, Nakladatelství Československé akademie věd

[4] Schatzman E.L., Praderie F. 1993 The Stars, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-54196-9

[5] Švestka Z. 1954 Hvězdné atmosféry, Nakladatelství Československé akademie věd

[6] Vanýsek V. 1980 Základy astronomie a astrofyziky, Academia Praha

Reference

[1] Adams W.S., Kohlschütter A. 1914 Astrophys. J. 40, 385

[2] Adelberger E.G., Austin S.M., Bahcall J.N. a kol. 1998 Rev. Mod. Phys. 70, 4, 1265

[3] Aller L.H. 1953 Astrophysics: The Atmospheres of the Sun and Stars, Ronald Press Co.,New York

[4] Aller L.H. 1963 Astrophysics: The Atmospheres of the Sun and Stars, 2nd Edition, Ronald Press Co.,New York

[5] Andersen J. 1991 Astron. Astrophys. Rev. 3, 91

[6] Ando H., Osaki Y. 1975, Publ. Astron. Soc. Japan 27, 581

[7] Angulo C., Arnould M., Rayet M. (NACRE collaboration) 1999 Nuclear Physics A 656, 1; http://pntpm.ulb.ac.be/Nacre/nacre.htm

[8] Bethe H. 1939 Phys. Rev. 55, 434

[9] Bethe H., Critchfield C.L. 1938 Phys. Rev. 54, 248

[10] Biermann L. 1951 Z. Astrophys. 29, 274

[11] Bjorkman J.E., Cassinelli J.P. 1993 Astrophys. J. 409, 429

[12] Böhm-Vitense E. 1958 Z. Astrophys. 46, 108

[13] Bopp B.W., Fekel F., Jr. 1977 Astron. J. 82, 490

[14] Breger M. 1979 Publ. Astron. Soc. Pacific 91, 5

[15] Breger M, Pamyatnykh A.A. 1998 Astron. Astrophys. 332, 958

[16] Breger M., Stockenhuber H. 1983 Hvar Obs. Bull. 7, 283

[17] Castor J.I., Abbott D.C., Klein R.I. 1975 Astrophys. J. 195, 157

[18] Caughlan G.R., Fowler W.A. 1988 Atomic data and Nuclear Data Tables 40, 284

[19] Claret A., Giménez A. 1992 Astron. Astrophys. Suppl. 96, 255

[20] Code A.D., Davis J., Bless R.C., & Hanbury Brown R. 1976 Astrophys. J. 203, 417

[21] Conti P.S. 1970 Publ. Astron. Soc. Pacific 82, 781

[22] Conti P.S. 1974 Astrophys. J. 187, 539

[23] Cox A.N., Stewart J.N., Eilers D.D. 1965 Astrophys. J. Suppl. 11, 1

[24] Cranmer S.R., Owocki S.P. 1996 Astrophys. J. 462, 469

[25] Crawford J.A. 1955 Astrophys. J. 121, 71

[26] Debernardi Y., Mermilliod J.-C., Carquillat J.-M., Ginestet N. 2000 Astron. Astrophys. 354, 881

[27] de Loore C., De Greve J.P. 1992 Astron. Astrophys. Suppl. 94, 453

[28] Dziembowski W.A., Pamyatnykh A.A. 1993 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 262, 204

[29] Dziembowski W.A., Moskalik P, Pamyatnykh A.A. 1993 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 265, 588

[30] Endal A.S., Sofia S. 1976 Astrophys. J. 210, 184

[31] Endal A.S., Sofia S. 1978 Astrophys. J. 220, 279

[32] Endal A.S., Sofia S. 1979 Astrophys. J. 232, 531

[33] Faulkner J., Roxburgh I.W., Strittmatter P.A. 1968 Astrophys. J. 151, 203

[34] Frost S.A., Conti P.S 1976 in Be and Shell Stars, IAU Symp. 70, Ed. by A. Slettebak, Dordrecht, Reidel, 139

[35] Graboske H.C., Harwood D.J., Rogers F.J. 1969 Phys. Rev. 186, 210

[36] Gundlach J.H., Merkowitz S.M. 2000 Phys. Rev. Lett. 85, 2869

[37] Habets G.M.H.J. 1987 Physics of Be Stars, IAU Col. 92, Ed. A.Slettebak a T.P. Snow, Cambridge Univ. Press, 509

[38] Harmanec P. 1970 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 21, 113

[39] Harmanec P. 1987 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 38, 52

[40] Harmanec P. 1988 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 39, 329

[41] Harmanec P. 1990 Astron. Astrophys. 237, 91

[42] Harmanec P. 1991 in Rapid Variability of OB Stars: Nature and Diagnostic Value, ESO Conf. and Workshop Proc. No. 36, 265

[43] Harmanec P. 1998 Astron. Astrophys. 335, 173

[44] Henyey L.G., Wilets L., Böhm K.H., Le Levier R., Levee R.D. 1959 Astrophys. J. 129, 628

[45] Hearnshaw J.B. 1999 New Astronomy Reviews 43, 403

[46] Chandrasekhar S. 1938 Stellar Structure, Univ. of Chicago Press

[47] Jurcsik J., Montesinos B. 1999 New Astronomy Reviews 43, 415

[48] Kato S. 1966 Publ. Astron. Soc. Japan 18, 374

[49] Kippenhahn R., Weigert A. 1967 Z. Astrophys. 65, 251

[50] Kippenhahn R., Meyer-Hofmeister E., Thomas H.C. 1970 Astron. Astrophys. 5, 155

[51] Kříž S., Harmanec P. 1975 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 26, 65

[52] Kurtz D. 1982 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 200, 807

[53] Kurtz D. 2000 ASP Conf. Ser. 210, 287

[54] Kvasnica J. 1965 Termodynamika, Státní nakladatelství technické literatury, Praha

[55] Larson R.B., Demarque P.R. 1964 Astrophys. J. 140, 524

[56] van Leeuwen F. 1999 Astron. Astrophys. 341, L71

[57] Levi-Civita T. 1937 Amer. J. Math. 59, 225

[58] Lucy L.B., Solomon P.M. 1970 Astrophys. J. 159, 879

[59] Maeder A. 1997 Astron. Astrophys. 321, 134 (paper 2)

[60] Maeder A. 1999 Astron. Astrophys. 347, 185 (paper 4)

[61] Maeder A., Meynet G. 2000a The Evolution of Rotating Stars, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 38, 143

[62] Maeder A., Meynet G. 2000b Astron. Astrophys. 361, 159 (paper 6)

[63] Maeder A., Zahn J.-P. 1998 Astron. Astrophys. 334, 1000 (paper 3)

[64] Mayer P. 1984 Observatory 104, 77

[65] Meynet G., Maeder A. 1997 Astron. Astrophys. 321, 465 (paper 1)

[66] Meynet G., Maeder A. 2000 Astron. Astrophys. 361, 101 (paper 5)

[67] Michaud G. 1970 Astrophys. J. 160, 641

[68] Mikulášek Z. 2000 Úvod do fyziky hvězd, skripta a sbírka úloh, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, Katedra teoretické fyziky a astrofyziky, Brno

[69] Morel P., Pichon B., Provost J., Berthomieu G. 1999 Astron. Astrophys. 350, 275

[70] Mullan D.J. 1984 Astrophys. J. 283, 303

[71] Owocki S.P., Cranmer S.R., Fullerton A.W. 1995 Astrophys. J. 453, L37

[72] Parker E.N. 1958 Astrophys. J. 128, 664

[73] Petersen J.O., Christensen-Dalsgaard J. 1999 Astron. Astrophys. 352, 547

[74] Pinsonneault M.H., Stauffer J., Soderblom D.R., King J.R., Hanson R.B. 1998 Astrophys. J. 504, 170

[75] Plavec M. Advan. Astron. Astrophys. , Ed by Z. Kopal, Academic Press, New York, 6, 201

[76] Popper D.M. 1980 Ann. Rev. Astron. Astrophys. 18, 115

[77] Porter J.M. 1996 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 280, L31

[78] Preston G.W. 1974 Ann. Rev. Astron. Astrophys. 12, 257

[79] Rivinius Th., Baade D., Štefl S., Stahl O., Wolf B., Kaufer A. 1998 in Ahalf century of stellar pulsations interpretations, Ed. by P.A. Bradley and J.A. Guzik, ASP Conf. Ser. 135, 343

[80] Robertson H.P. 1938 Annals of Mathem. 39, 101

[81] Robichon N., Arenou F., Mermilliod J.-C., Turon C. 1999 Astron. Astrophys. 345, 471

[82] Rodríguez E., Breger M. 2001 Astron. Astrophys. 366, 178

[83] Rogers F.J., Iglesias C.A. 1992 Astrophys. J. Suppl. 79, 507

[84] Rogers F.J., Swenson F.J., Iglesias C.A. 1996 Astrophys. J. 456, 902

[85] Sackmann I.-J., Anand S.P.S. 1970 Astrophys. J. 162, 105

[86] Salpeter E.E. 1952 Astrophys. J. 115, 326

[87] Sandage A. 1957 Astrophys. J. 125, 435

[88] Shindo M., Hashimoto M., Eriguchi Y., Müller E. 1997 Astron. Astrophys. 326, 177

[89] Schaller G., Schaefer D., Meynet G., Maeder A. 1992 Astron. Astrophys. Suppl. 96, 269

[90] Schwarzschild M. 1958 Structure and Evolution of the Stars, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press

[91] Struve O. 1931 Astrophys. J. 73, 94

[92] Thaller M.L. 1997 Astrophys. J. 487, 380

[93] Unsöld A. 1955 Physik der Sternatmosphären, Berlin, 2.vydání

[94] Vemury S.K., Stothers R. 1978 Astrophys. J. 225, 939

[95] Weizsäcker C.F. 1937 Phys. Zeit. 38, 176

[96] Wolf C.J.E., Rayet G. 1867 Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 65, 292